سلسلۂ نصابات تعلیمِ جامعۂ عثمانیہ

سکون سیالات

پروفیسر لونی کی کتاب ایلی منٹس آف ہیڈروسٹاٹکس کا اردو ترجمہ

عثمانیہ یونیورسٹی کے بی۔اے کی جماعتوں کے لئے

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔اے

پروفیسر ریاضیات عثمانیہ یونیورسٹی کالج حیدرآباد دکن

۱۳۳۹ھ م ۱۳۳۰ف م ۱۹۲۱ء

مطبوعۂ دارالطبع سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

فہرستِ مضامین

بسم اللہ الرحمن الرحیم

چند مشہور ہندسی ضابطے

دائرہ۔ اگر ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو اس کا محیط = ۲ π ر
اور اس کا رقبہ = π ر²

[π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵........ = ۲۲/۷ تقریباً]

اسطوانہ۔ اگر ایک اسطوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہو اور ارتفاع ف، تو اس کی سطح کا رقبہ = ۲ π ر ف
اور اس کا حجم = π ر² ف

کرہ۔ اگر ایک کرہ کا نصف قطر ر ہو تو اسکی سطح کا رقبہ = ۴ π ر²
اور اس کا حجم = ۴/۳ π ر³

کرہ کے منطقہ کا رقبہ (منطقہ، کرہ کی سطح کا وہ حصہ ہے جس کو دو متوازی مستوی سطحیں کرہ سے کاٹیں) = کرہ کا محیط × متوازی سطحوں کے درمیان کا عمودی فاصلہ

= ۲ π ر د جہاں د عمودی فاصلہ ہے۔

منطقہ کا مرکز ثقل اس خط کی تنصیف کرتا ہے جو مستوی سروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے۔

اگر دو متوازی مستوی سطحیں ایک کرہ کو کاٹیں اور ان سطحوں کے فاصلے کرہ کے مرکز سے لا_1 اور لا_2 ہوں تو کرہ کے اُس حصہ کا حجم جو ان سطحوں کے درمیان واقع ہے

$$= \frac{\pi}{3}\left(\text{لا}_2 - \text{لا}_1\right)\left[3\,\text{ر}^2 - \left(\text{لا}_1^2 + \text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_2^2\right)\right]$$

مخروط۔ اگر ایک مخروط کا ارتفاع **ف** ہو اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہو تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ ضلع مائل × قاعدہ کا محیط

$$= \pi\,\text{ر}\sqrt{\text{ف}^2 + \text{ر}^2}$$

اس کا حجم $= \frac{1}{3}$ ارتفاع × قاعدہ کا رقبہ

$$= \frac{1}{3}\pi\,\text{ر}^2\,\text{ف}$$

مخروطِ ناقص کا حجم $= \frac{\pi}{3}\,\text{د}\left(\text{ر}_1^2 + \text{ر}_1\text{ر}_2 + \text{ر}_2^2\right)$

جہاں ر_1، ر_2 اس کے مستدیر سروں کے نصف قطر ہیں اور سروں کا عمودی فاصلہ ایک دوسرے سے **د** ہے۔

گردشی مکافی نما۔ یہ مجسم، قطع مکافی کو اُس کے محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ایک مستوی سطح اس کے محور پر عمود ہو تو جو حصہ یہ سطح اس مجسم سے کاٹے گی اُس کا حجم = اُس اسطوانہ کا نصف حجم جو اُس مستوی سطح پر کھڑا ہو اور جس کا ارتفاع وہی ہو جو حصہ مذکور کا ہے

$= \frac{1}{2}$ مستوی قاعدہ کا رقبہ × ارتفاع

باب اول

سیّالی دباؤ

۱۔ علم سکون میں ہم نے استوار اجسام کے توازن پر بحث کی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ استوار جسموں کے ترکیبی ذرّوں کے باہمی فاصلے ہمیشہ وہی رہتے ہیں یعنی اُن کے ذرّے اپنے اضافی مقامات کو بلحاظ ایک دوسرے کے نہیں بدلتے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ استوار جسم کی ایک خاص **شکل** اور **جسامت** ہوتی ہے۔ علم سکون میں اشارۃً ہم نے یہ بھی بتا دیا تھا کہ اس قسم کے جسم قدرت میں نہیں ملتے۔ لیکن ایسے اجسام بکثرت موجود ہیں جو اوپر کی تعریف کو قریب قریب پورا کرتے ہیں۔

سکون سیالات میں ہم ایسے اجسام کے توازن پر بحث کریں گے جیسے پانی، تیل، گیس وغیرہ۔ ایسے جسموں کی مشترک اور مشہور خاصیت یہ ہے کہ ان کے اجزاء ایک دوسرے سے بیحد آسانی اور سہولت سے جدا ہو سکتے ہیں۔

اگر ایک نہایت ہی باریک پترے کو کنارے کے بل پانی میں دھکیلیں تو پترے کی حرکت کو روکنے کے لئے نہایت ہی کم

مزاحمت محسوس ہوگی۔ یعنی رگڑ کی قسم کی قوت پتھر سے کی سطح کی سمت میں نہایت ہی خفیف ہوگی۔ دراصل کوئی سیال ایسا نہیں ہے جس میں یہ قوت بالکل معدوم ہوتی ہو لیکن اس کتاب میں شروع سے آخر تک ہم یہ فرض کرینگے کہ ہمارے زیر بحث میں یہ قوت بالکل معدوم ہوتی ہے۔

ایسے فرضی سیال کو **سیال کامل** کہتے ہیں۔ باقاعدہ طور پر ہم اس کی تعریف اگلی دفعہ میں کرینگے۔

۲۔ ایسا خیال کرو کہ سیال کے اندر ایک چھوٹی مستوی سطح کہیں واقع ہے' اس کے دونوں طرف سیال کے جو دو حصے ہیں وہ ایک دوسرے پر عمل کرتے ہیں اور اُن کے تعامل کو دو حصوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ایک سطح فاصل کی عمودی سمت میں اور دوسرے اس کے متوازی' پہلی قوت کو عمودی اور دوسری کو مماسی قوت کہتے ہیں۔

سیال کامل۔ **تعریف**۔ سیال کامل وہ شے ہے جس کی شکل کسی مماسی قوت کو (خواہ وہ کتنی ہی قلیل ہو) کافی دیر تک لگانے سے بدل دی جا سکتی ہے' اور جس کے حصے اس کی باقی مقدار سے بآسانی جدا ہو سکتے ہیں' اور جس کے مختلف حصوں میں کسی قسم کی مماسی قوت یعنی رگڑ کی قسم کی قوت عمل نہیں کرتی۔ پانی اُس حالت میں جبکہ یہ حرکت کر رہا ہو سیال کامل کی تعریف کو پورا نہیں کرتا۔

مثلاً اگر ہم ایک پیالے میں پانی کو گھمانا شروع کریں تو رگڑ کی قسم کی

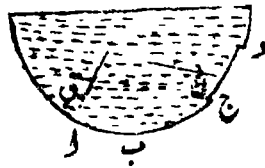
جو مزاحمتیں پانی اور پیالے کے درمیان ہیں اور جو پانی کے مختلف حصوں کے درمیان عمل کرتی ہیں وہ پانی کو جلد حالت سکون میں لے آئینگی، لیکن جب پانی حرکت نہ کر رہا ہو تو اس وقت اس کو عملی طور پر سیال کامل کہا جا سکتا ہے۔

۳۔ سیالات کی پھر دو قسمیں ہیں، **مائعات** اور **گیسیں**۔ مائعات ایسی اشیاء ہیں جیسے پانی اور تیل، ان کی مشہور خاصیت یہ ہے کہ یہ مطلق دب نہیں سکتے اور نہ دبنے والا سیال وہ ہے جس کا کل حجم (یعنی وہ جگہ جو یہ گھیرتا ہے) کسی قوت کے لگانے سے خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہو کم یا زیادہ نہ ہو سکے اگرچہ ایک چھوٹی سے چھوٹی قوت اس کی شکل کو بآسانی بدل دے۔ فی الحقیقت سب مائعات بہت بڑے دباؤ کے زیر عمل کسی نہ کسی حد تک دب جاتے ہیں۔ مثلاً کرۂ ہوائی کے دباؤ کا تقریباً ۲۰۰ گنا، پانی کے کسی حجم کو صرف بقدر $\frac{1}{100}$ ویں حصہ حجم کے کم کرے گا۔ لیکن حجم کی اس قلیل کمی کو ہم نظر انداز کرینگے اور مائعات کو ایسے سیال تصور کرینگے جو بالکل بے لچک ہوں یعنی بالکل دب نہ سکیں۔

برعکس ان کے، گیسیں وہ سیال ہیں جن کا حجم آسانی سے بدل سکے یعنے جو بآسانی دب سکیں۔

اگر ایک ظرف کے اندر بچہ کے کھیلنے کی گیند رکھ دی جائے جسکے اندر ہوا ہو، اور ہوا پمپ کے ذریعہ اس ظرف کی ہوا خارج کیجائے تو گیند حجم میں بڑھ جائے گی۔ اگر گیند کی سطح پر کوئی سوراخ ہو تو ہوا پھیل کر ظرف کو بھر دے گی خواہ ظرف کا حجم کچھ ہی ہو۔

۴۔ مائع اور گیس کی باضابطہ تعریفات یہ ہو سکتی ہیں۔
مائع کامل وہ سیال ہے جو بالکل نہ دب سکے۔
گیس وہ سیال ہے جس کی کوئی محدود مقدار فضا کے بڑے سے بڑے حصہ کو بھر دے اگر اُس دباؤ کو جو اس پر عمل کر رہا ہو کافی طور پر کم کردیا جائے۔
۵۔ پس ایک جسم استوار، مائع اور گیس کے باہمی فرق اس طرح بیان ہو سکتے ہیں۔ کامل طور پر استوار جسم وہ ہے جو ایک خاص حجم اور خاص شکل رکھتا ہو۔
مائع کامل کا ایک خاص حجم ہوتا ہے لیکن اس کی کوئی خاص شکل نہیں ہوتی۔
گیس کامل کا نہ کوئی خاص حجم ہوتا ہے اور نہ کوئی خاص شکل۔
۶۔ **لزج سیال**۔ کوئی سیال ایسا نہیں جسے کامل کہ سکیں، بہت سے سیال ایسے ہیں (جیسے شیرہ۔ شہد اور تارکول) کہ اگر ان کی شکل بدلنے کی کوشش کی جائے تو ان کی مزاحمت پر غالب آنے کے لئے بہت زور لگانا پڑتا ہے، اس قسم کے سیال جن کی متصل تہوں کے درمیان مماسی عمل یا جزی زور اتنا ہو کہ نظر انداز نہ ہو سکے ان کو لزج سیال کہتے ہیں۔
۷۔ **کسی نقطہ پر کا دباؤ**۔ فرض کرو کہ ایک برتن کے پہلو میں ایک سوراخ کردیا گیا ہے اور ایک تختی اس پر لگا دی گئی ہے جو اس پر خوب منطبق ہوتی ہے۔ اب اگر اس برتن میں کوئی سیال ڈالا جائے تو تختی صرف اس صورت میں ساکن رہ سکے گی جبکہ کوئی

بیرونی قوت اس کو سہارنے کے لئے لگائی جائے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ لازماً سیال تختی پر قوت لگاتا ہے۔
نیز بموجب تعریف سیال کی یہ قوت اس تختی کے ہر جزو پر عموداً عمل کرتی ہے۔
اب اگر تختی کے رقبہ کے ہر مساوی جزو پر سیال یکساں قوت لگائے تو جو قوت تختی کے کسی نقطہ ن کے گرد رقبہ کی ایک اکائی پر عمل کرتی ہے اس کو نقطہ ن پر کا دباؤ کہتے ہیں۔
لیکن اگر تختی کے ہر مساوی جزو پر سیال یکساں قوت نہ لگائے جیسے تختی ج د پر، تو نقطہ ن پر کا دباؤ اس قوت سے تعبیر ہوگا جو سیال زیر بحث ن پر کے رقبہ کی ایک اکائی پر لگاتا ہے بشرطیکہ یہ مان لیا جائے کہ رقبہ کی اس اکائی پر دباؤ یکساں ہے اور اس دباؤ کے برابر ہے جو ن پر کے لا انتہا قلیل رقبہ پر عمل کرتا ہے

اگر کوئی نقطہ ق سیال کے اندر واقع ہو تو اس نقطہ پر کا دباؤ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک نہایت ہی چھوٹی استوار تختی جس کا رقبہ ا مربع فٹ ہے نقطہ ق پر رکھ دی گئی ہے

اور نقطہ ق ٹھیک اس پر واقع ہوتا ہے، نیز فرض کرو کہ اس تختی کے ایک طرف کا کل سیال نکال دیا گیا ہے اور تختی کو ساکن رکھنے کے لئے ایک ک پونڈ وزن کی قوت لگانی پڑتی ہے۔ تب نقطہ ق پر کا دباؤ [illegible] پونڈ وزن فی مربع فٹ کی قوت کے برابر ہوگا۔

۸۔ اکائیوں کے فٹ، پونڈ نظام میں دباؤ کی اکائی جو نظریات میں مستعمل ہے وہ ایک پونڈل فی مربع فٹ ہے اور سنتی میٹر، گرام، ثانیہ (س، گ، ث) نظام میں یہ اکائی ایک ڈائن فی مربع سنتی میٹر ہے۔

لیکن عملیات میں ایک سیال کے کسی نقطہ پر کا دباؤ اس طرح بیان نہیں کیا جاتا کہ یہ اتنے پونڈل فی مربع فٹ ہے، بلکہ بالعموم اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ دباؤ فی مربع انچ اتنے پونڈ وزن کے برابر ہے۔ اس میں شک نہیں کہ نظری حسابات میں دباؤ کو 'پونڈلوں' میں بیان کرنا زیادہ سود مند ہے، اس کو جب چاہیں "پونڈ وزن فی مربع انچ" کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں۔ اسی طرح سے (س، گ، ث) نظام میں بھی دباؤ کو عملی طور پر اس طرح بیان کرتے ہیں کہ یہ اتنے گراموں کا وزن فی مربع سنتی میٹر ہے۔

بعض اوقات سہولت کی خاطر ایسے دباؤ کو جو فٹ پونڈ نظام کے موافق بیان کیا گیا ہو (س، گ، ث) نظام میں منتقل کرنے کی ضرورت پڑتی ہے، اکائیوں کے ان نظاموں کے باہم تقریبی تعلقات یہ ہیں۔

۱ انچ = ۲٫۵۴ سنتی میٹر، ایک سنتی میٹر = ۰٫۳۹۳۷ انچ

۱ پونڈ = ۴۵۳٫۶ گرام، ایک گرام = ۰٫۰۰۲۲۰۴ پونڈ

اس لئے فی مربع انچ ایک پونڈ وزن کا دباؤ

= فی (۲٫۵۴)^2 مربع سنتی میتر ۴۵۳٫۶ گرام وزن کا دباؤ

= فی مربع سنتی میتر $\frac{۴۵۳٫۶}{(۲٫۵۴)^2}$ گرام وزن کا دباؤ۔

فی مربع سنتی میتر ۷۰٫۳۰ گرام وزن کا دباؤ

اسی طرح سے فی مربع سنتی میتر ایک گرام وزن کا دباؤ

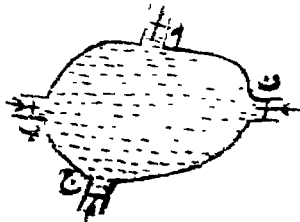
= فی (۳۹۳۷ء۰)^2 مربع انچ ۰٫۰۰۲۲۰۴ پونڈ وزن کا دباؤ

= فی مربع انچ $\frac{۰٫۰۰۲۲۰۴}{(۰٫۳۹۳۷)^2}$ پونڈ وزن کا دباؤ

= فی مربع انچ ۰٫۰۱۴۲ پونڈ وزن کا دباؤ۔

۹۔ سیالی دباؤ کا انتقال۔

اگر کسی سیال کی سطح پر کوئی دباؤ ڈالا جائے تو یہ دباؤ سیال کے سب حصوں میں مساوی طور پر منتقل ہو جاتا ہے۔

اس مسئلہ کو تجربی طور پر ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں۔
فرض کرو کہ کسی شکل کا کوئی ظرف ہے اور اس میں کوئی سیال بھرا ہے نیز فرض کرو کہ کئی ایک مختلف رقبوں کے چھوٹے بڑے سوراخ ا، ب، ج، ف... ظرف میں موجود ہیں جن کو خوب پھنس کر آنے والے فشاروں سے بند کیا گیا ہے، ان فشاروں پر مختلف قوتیں لگائی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ان فشاروں کے رقبے ا، ب، ج، ف... مربع فٹ
ہیں اور یہ فشارے مناسب قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہیں۔
اگر ا پر مزید قوت د × ا لگائی جائے [یعنی ا پر کے رقبہ کی
ہر اکائی پر د پونڈ وزن کا مزید دباؤ ڈالا جائے] تو یہ معلوم ہوگا
کہ ب پر د × ب پونڈ وزن، ج پر د × ج پونڈ وزن
ف پر د × ف پونڈ وزن، وغیرہ وغیرہ کی مزید قوتیں
لگانی پڑتی ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ اگر ا پر کے رقبہ کی ہر ایک اکائی
پر د پونڈ وزن کا دباؤ زیادہ کردیا جائے تو اس کا یہ نتیجہ ہوتا ہے
کہ ب کے رقبے کی ہر ایک اکائی پر د پونڈ وزن کا دباؤ زیادہ
ہو جاتا ہے اور اسی طرح سے باقی فشاروں ج، ف... میں سے
ہر ایک کی یہی کیفیت ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوا۔

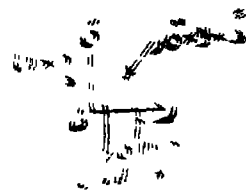
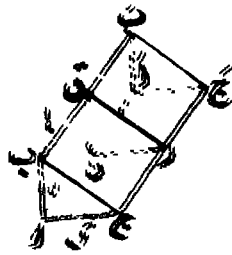
۱۰۔ ایک ساکن سیال میں کسی نقطہ پر کا دباؤ ہر سمت میں وہی
ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ دفعہ آٹھ کی تھوڑی سی ترمیم سے تجربی طریق پر ثابت ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ فشارہ ف ایسا ہے کہ اس کو پھرا کر کسی خاص مقام
حاصل میں لا سکتے ہیں۔ یعنی اس کی سطح کو کسی ایک فشارہ (ا یا ج)
کی سطح کے متوازی کر سکتے ہیں یا اس کو کسی اور مقام پر با سانی لا سکتے
ہیں۔ تجربہ سے معلوم ہوگا کہ اگر ا پر کے رقبہ کی ہر ایک اکائی پر
دباؤ د کا اضافہ کیا جائے تو فشارہ ف کسی محل میں ہو اس کے
رقبہ کی ہر ایک اکائی پر دباؤ د کا اضافہ ہو جائے گا۔

۱۱۔ دفعہ گزشتہ کا مسئلہ اس اساسی اصول سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

کہ ایک سیال کا دباؤ ایک ایسی سطح پر جو اس کو مس کرے ہمیشہ عمود وار ہوتا ہے۔

سیال کے ایک ایسے حصہ پر غور کرو جس کی شکل مثلثی منشور کی ہو۔ فرض کرو کہ اس کا قاعدہ اج جَ اَ متوازی الافق ہے اور اس کا مستطیل پہلو اب بَ اَ اور نیز مثلثی پہلو اب ج اور اَ بَ جَ تینوں انتصابی ہیں۔

فرض کرو کہ منشور کی لمبائی اَا چوڑائی اج اور اونچائی اب تینوں طول میں نہایت ہی کم ہیں اور فرض کرو کہ ااَ، ب بَ، ج جَ کے نقاطِ تنصیف بالترتیب ن، ق، ر ہیں۔

فرض کرو کہ ااَ، اب، اج کے طول بالترتیب لا، ما، ی ہیں چونکہ کناروں ااَ، اج کے طول لا، ی بہت کم ہیں اس لئے ہم پہلو ااَ جَ ج پر کے دباؤ کو یکساں خیال کر سکتے ہیں، اور اگر اس کے رقبہ کی ہر اکائی پر دباؤ د ہو تو اس قوت کی کل مقدار جو سیال اس پہلو پر لگاتا ہے د × لا ی ہوگی اور ظاہر ہے کہ یہ ن ر کے نقطۂ تنصیف پر عمل کرے گی۔

اسی طرح سے اگر ااَ بَ ب اور ب ج جَ بَ کے رقبوں پر

فی اکائی دباؤ بالترتیب دَ اور دً ہوں تو ان رقبوں پر عمل کرنیوالی قوتوں کی مقداریں بالترتیب دَ × لا ما اور دً × لا × ق ل ہونگی اور وہ بالترتیب ن ق اور ق ل کے نقاط تنصیف پر عمل کریں گی۔

فرض کرو کہ سیال کے حجم کی ایک اکائی کا وزن و ہے، چونکہ منشور کا حجم = لا × رقبہ ا ب ج یعنی لا × ½ ما ی ہے اس لئے سیالی منشور کا وزن = و × ½ لا ما ی، اور یہ مثلث ن ق ل کے مرکز ثقل میں سے شاقولی سمت میں عمل کرتا ہے۔ یہ وزن اور تینوں قوتیں جو منشور کے پہلوؤں پر عمل کرتی ہیں باہم متوازن ہیں کیونکہ اگر ایسا نہو تو منشور اُن کے زیرِ عمل حرکت کرنا شروع کرے گا۔

اس لئے افقی سمت میں تحلیل کرنے سے

دَ × لا ما = دً × لا × ق ل جم (۹۰° - ل) = دً × لا × ق ل جب ل

= دً × لا × ن ق = دً × لا ما

اس لئے دَ = دً .... (۱)

نیز انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

د × لا ی - و × ½ لا ما ی = دً × لا × ق ل جب (۹۰° - ل)

= دً × لا × ق ل جم ل = دً × لا × ن ل

= دً × لا ی

اس لئے د - دً = و × ½ ما .... (۲)

اب فرض کرو کہ منشور کے اضلاع لا انتہا چھوٹے ہیں۔ (اگر ایسا

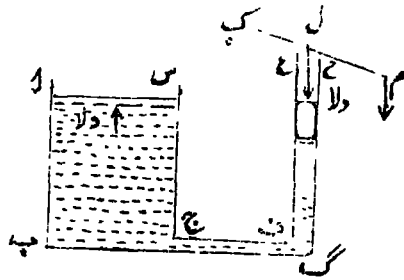
ہو تو د، دَ، دً نقطہ ن پہ کے دباؤ ہوں گے جو نقطہ ن پر بالترتیب اسمات ن ر، ن ق اور ق ر پر عمودی سمتوں میں عمل کرینگے) اس صورت میں مقدار د × ½ ا م لا انتہا قلیل ہو جائے گی اور اس لئے نظر انداز ہو سکے گی۔

تب مساوات (۲) سے حاصل ہو گا

د = دً

یعنی د = دَ = دً

اب ق ر کی سمت متعین نہیں کی گئی، اس کی سمت جو ہم چاہیں ہو سکتی ہے اور بنا بریں دً کی سمت جو ق ر پر عمود ہے جو ہم چاہیں ہو سکتی ہے۔ اسلئے معلوم ہوا کہ ن پر کے سیال کا دباؤ سب سمتوں میں وہی ہے۔

۱۲۔ براما کا آبی شکنجہ۔ براما کا شکنجہ سیالی دباؤ کو منتقل کرنے کی ایک سادہ مثال ہے۔

اس کی نہایت سادہ شکل یہ ہے، اس میں دو اسطوانے اب ج س اور ع ف گ ح ہوتے ہیں جن میں پانی بھر دیا جاتا ہے، اور ایک نالی ج گ ان اسطوانوں کو ملاتی ہے۔ ایک اسطوانے کی

عمودی تراش دوسرے کی عمودی تراش سے بہت بڑی ہوتی ہے۔
ہر اسطوانہ میں ایک خوب پھنس کر آنیوالا فشارہ ہوتا ہے جس میں سے پانی نہیں گزر سکتا۔

فرض کرو کہ ان فشاروں کی تراشوں کے رقبے ﻻ اور لا ہیں۔
نیز چھوٹے فشارہ کے رقبہ پر فی اکائی د پونڈ وزن کے حساب سے دباؤ ڈالا جاتا ہے، یعنے کل قوت جو اس پر لگائی جاتی ہے د × لا پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

دفعہ ۹ کی رُو سے یہ دباؤ جو رقبہ کی ایک اکائی پر د پونڈ وزن کے حساب سے لگایا گیا ہے کل سیال میں منتقل ہو جائے گا یعنے کل زور یا دباؤ جو بڑے فشارہ کی سطح پر جاکر پڑے گا وہ د × ﻻ پونڈ وزن کے مساوی ہوگا۔

یہ زور بڑے فشارہ کی سطح پر د × ﻻ پونڈ وزن کے ایک جسم کو سہار سکے گا۔

اسلئے $\dfrac{\text{سہارے ہوئے جسم کا وزن}}{\text{قوت جو لگائی گئی ہے}} = \dfrac{\text{د} \times \text{ﻻ}}{\text{د} \times \text{لا}} = \dfrac{\text{ﻻ}}{\text{لا}}$

پس معلوم ہوا کہ چھوٹے فشارہ پر جو قوت لگائی جائے وہ نسبت $\dfrac{\text{ﻻ}}{\text{لا}}$ یعنی اسطوانوں کے رقبوں کی نسبت سے ضرب کھا جاتی ہے۔

اوپر کی تحقیقات میں فشاروں کے اوزان کو اور نیز اسطوانوں میں جو سیال ہے اس کی اونچائیوں کے فرق کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

چھوٹے فشارہ پر دباؤ بالعموم ایک بیرم ک ل م کے ذریعہ ڈالا جاتا ہے،

جو اپنے ثابت سرے ک کے گرد بلا تکلف حرکت کرسکتا ہے،
م پر قوت لگائی جاتی ہے اور نقطہ ل کو چھوٹے فشارہ کے
ساتھ ایک استوار سلاخ کے ذریعہ وصل کردیا جاتا ہے۔
اگر ہم چھوٹے فشارہ کے رقبہ کو نہایت ہی کم کردیں اور بڑے
فشارہ کے رقبہ کو لا انتہا بڑھا دیں تو نظری تحقیق کی رُو سے ہم
اُس قوت کو جو لگائی گئی ہے جتنا چاہیں بڑھا سکتے ہیں، عملی
طور پر قوت کی یہ تضعیف خاص حدود کے اندر ہی ہو سکتی ہے۔
کیونکہ ایسا کرنیکے لئے ضروری ہے کہ ظرفوں کے پہلو دباؤ کو سہارنیکے
لئے بہت ہی مضبوط بنائے جائیں۔
۱۳ مشق۔ایک براما کے شکنجہ میں چھوٹے فشارہ کا رقبہ $\frac{1}{3}$ مربع انچ ہے
اور بڑے فشارہ کا رقبہ ۲ مربع فٹ۔ اگر چھوٹے فشارہ پر ۲۰ پونڈ وزن
کی قوت لگائی جائے تو معلوم کرو کہ بڑے فشارے پر یہ کتنے
وزن کو سہار سکے گی۔
جو سیال چھوٹے فشارہ کو مس کرتا ہے اس کے ہر ایک نقطہ پر کا دباؤ
۲۰ ÷ $\frac{1}{3}$ یعنی ۶۰ پونڈ وزن فی مربع انچ کے برابر ہے۔
دفعہ ۹ کی رُو سے دباؤ کی یہ مقدار بڑے فشارہ کے ہر ایک مربع انچ
پر جاکر عمل کرتی ہے جس کا رقبہ ۲۸۸ مربع انچ ہے۔
اسلئے کل دباؤ یازور جو بڑے فشارہ پر عمل کرتا ہے ۲۸۸ × ۶۰ یعنی ۱۷۲۸۰ پونڈ
وزن یعنی $\frac{5}{7}$ ۷ ٹن وزن کے برابر ہے۔
اسلئے بڑا فشارہ $\frac{5}{7}$ ۷ ٹن وزن کو سہار سکے گا۔
۱۴۔ براما کا شکنجہ کام کے اصول کی جو علم سکون کی دفعہ ۲۰۰ میں

بیان ہوا ہے ایک عمدہ مثال ہے۔ چھوٹے اسطوانہ کے پانی کی کمی بڑے اسطوانہ کے پانی کی زیادتی کے مساوی ہے، اس لئے

قا × ما = قا × ما

جہاں ما اور ما اُن فاصلوں کو تعبیر کرتے ہیں جو بڑا اور چھوٹا فشارہ بالترتیب طے کرتا ہے۔

اسلئے قا / قا = ما / ما

اسلئے (وہ قوت جو بڑا فشارہ لگاتا ہے) / (وہ قوت جو چھوٹا فشارہ لگاتا ہے) = قا / قا = ما / ما

اسلئے وہ قوت جو بڑا فشارہ لگاتا ہے × ما

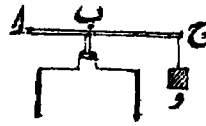
= وہ قوت جو چھوٹا فشارہ لگاتا ہے × ما

یعنے معلوم ہوا کہ جتنا کام بڑا فشارہ کرتا ہے وہ اس کام کے مساوی ہے جو چھوٹے فشارہ پر کیا گیا ہے۔

اسلئے کام کا اصول اس صورت میں صحیح ہے۔

۱۵۔ محافظ کھلمندن

محافظ کھلمندن سیالون کے دباؤ کی ایک اور عمدہ مثال ہے۔ انجن کے جوشدان میں ممکن ہے کہ بعض اوقات بھاپ کا دباؤ اتنا زیادہ ہو جائے کہ جوشدان کی مضبوطی اسکی متحمل نہو سکے۔ اس صورت میں جوشدان کے پھٹنے کا اندیشہ ہوگا، محافظ کھلمندن کا یہ فائدہ ہے کہ جب بھاپ کا دباؤ ایک ایسی حد سے زیادہ ہوجائے جو جوشدان کی مضبوطی کے لحاظ سے نامناسب ہو تو بھاپ کو

خارج ہونے کا راستہ دیدیا جائے۔
ایک قسم کے محافظ کھلمندن کی شکل ذیل میں دی گئی ہے، جوشدان کے پہلو میں ایک گول سوراخ ہے جس کے اندر ایک ڈاٹ یا ڈھٹی پھنس کر آتی ہے، اس ڈاٹ کو ایک بیرم یا سلاخ اب ج کے ساتھ نقطہ ب پر لگا دیا گیا ہے اور بیرم کا ایک سرا ا مشین کے کسی ثابت حصہ کے ساتھ پیوست کردیا گیا ہے۔
بیرم اب ج نقطہ ا کے گرد حرکت کرسکتا ہے اور اسکے دوسرے سرے پر وزن لٹکا دئے جا سکتے ہیں۔
ظاہر ہے کہ بھاپ کا دباؤ اور ج پر کا وزن بیرم کو متقابل جانبوں میں پھرانے کی قابلیت رکھتے ہیں۔ جب بھاپ کے دباؤ کا معیارِ اثر نقطہ ا کے گرد ج پر کے وزن کے معیارِ اثر سے بڑا ہوگا تو ڈاٹ اوپر کو اٹھیگی اور کچھ بھاپ خارج ہوکر دباؤ کم ہو جائے گا۔

اور قسم کے کھلمندنوں میں بیرم اب ج نہیں ہوتا اور ڈاٹ کی جگہ ایک گول پردہ یا کھلمندن ہوتا ہے جس کے ساتھ وزن بندھے ہوتے ہیں۔ اور وہ اپنے محیط کے ایک نقطہ کے گرد حرکت کرسکتا ہے

مثال۔ ایک محافظ کھلندن کے بیرم کے بازو ۱ انچ اور ۱۸ انچ ہیں، بڑے بازو کے سرے پر ایک ۲۰ پونڈ کا وزن لٹکایا گیا ہے، اگر کھلندن کا رقبہ $۱\frac{۱}{۲}$ مربع انچ ہو تو معلوم کرو کہ جوشدان کے اندر زیادہ سے زیادہ کتنا دباؤ رکھنا مناسب خیال کیا گیا ہے۔

اگر مطلوبہ دباؤ فی مربع انچ د پونڈ وزن کے مساوی ہو تو قوت کی کل مقدار جو بھاپ کھلندن پر لگاتی ہے

$$= د \times \frac{۳}{۲} \text{ پونڈ وزن}$$

جب کھلندن عین اٹھنے کو ہوتا ہے اس وقت $\frac{۳د}{۲}$ اور ۲۰ پونڈ وزن کی قوتیں جو بالترتیب ۱ انچ اور ۱۸ انچ لمبے بازوں کے سروں پر عمل کرتی ہیں توازن پیدا کرتی ہیں

$$\text{اسلئے } \frac{۳د}{۲} \times ۱ = ۲۰ \times ۱۸$$

$$\therefore د = ۲۴۰ \text{ پونڈ وزن}$$

امثلہ نمبری ۱

۱۔ ایک براما کے شکنجہ میں بڑے اور چھوٹے فشاروں کے قطر بالترتیب $۲\frac{۱}{۲}$ دسی میتر اور ۲ سنتی میتر ہیں، چھوٹے فشارہ کے سر پر ایک کلوگرام وزن رکھا گیا ہے، معلوم کرو کہ بڑے فشارہ پر کتنا وزن سہارا جا سکتا ہے۔

۲۔ ایک براما کے شکنجہ میں بڑے فشارہ کا رقبہ ۱۰۰ مربع انچ ہے اور چھوٹے فشارہ کا $\frac{۱}{۴}$ مربع انچ، معلوم کرو کہ چھوٹے فشارہ پر کتنی قوت لگائی جائے کہ بڑا فشارہ ایک ٹن وزن اٹھا سکے۔

۳۔ ایک حوض جسکو پانی سے بھر کر بند کردیا گیا ہے زیادہ سے زیادہ ۱۵۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ فی مربع فٹ برداشت کرسکتا ہے۔ ایک نالی جس کی تراش $\frac{1}{4}$ مربع انچ ہے حوض کے ساتھ ملا دی گئی ہے اور اس نالی کو پانی سے بھر دیا گیا ہے، اگر اس نالی کے خالی سرے پر ایک فشارہ لگا دیا جائے تو معلوم کرو کہ اس فشارہ پر زیادہ سے زیادہ کتنا وزن رکھا جا سکتا ہے کہ حوض کے پہلوؤں کے پھٹنے کا احتمال نہ ہو۔

۴۔ ایک براما کے [illegible] پونڈ وزن کی ایک قوت ایک ٹن وزن کا مجموعی دباؤ پیدا کرتی ہے، اگر فشارہ کے قطروں کی باہمی نسبت ۸ : ۱ ہو تو جس بیرم کے ذریعہ چھوٹے فشارہ پر دباؤ ڈالا جاتا ہے اس کے بازوؤں کے طولوں کی نسبت دریافت کرو۔

۵۔ ایک شکنجہ آبی کے اسطوانوں کے نصف قطر بالترتیب ۳ انچ اور ۶ فٹ ہیں، قوت ۲ فٹ لمبے بیرم کے سرے پر لگائی جاتی ہے اور چھوٹے فشارے کو نصاب سے ۲ انچ کے فاصلہ پر لگایا گیا ہے۔ اگر بڑے فشارہ پر ۱۰ ٹن وزن کا ایک جسم رکھدیا جائے تو اُس قوت کی مقدار دریافت کرو جو شکنجہ کے ذریعہ وزن مذکور کو اٹھانے کے لئے بیرم کے سرے پر لگانی پڑے گی۔ اگر شکنجہ کے اجزا زیادہ سے زیادہ ۱۵۰ پونڈ وزن فی مربع انچ برداشت کرسکیں تو بڑے سے بڑے وزن کی مقدار دریافت کرو جو مشین کے ذریعہ اٹھایا جا سکتا ہے۔

۶۔ ایک ظرف کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس کے منہ پر ایک پھنس کر آنے والا کاگ لگا دیا گیا ہے، اس کی کیا وجہ ہے کہ کاگ پر

ایک ذرا سا صدمہ برتن کو توڑ دینے کے لئے کافی ہو سکتا ہے۔

۷ ۔ ایک محافظ کھلندن کا جو بیرم ہے اس کے بازوؤں کے طول بالترتیب ۲ انچ اور ۲ فٹ ہیں ۔ اور بڑے بازو کے سرے پر ۱۲ پونڈ کا وزن لٹکا دیا گیا ہے، اگر کھلندن کا رقبہ ا مربع انچ ہو تو معلوم کرو کہ جس وقت کھلندن اوپر اٹھتا ہے اس وقت جوشدان کے اندر کتنا دباؤ ہوتا ہے ۔

۸ ۔ ایک گول محافظ کھلندن کا قطر $\frac{1}{2}$ انچ ہے اور کھلندن کیساتھ کچھ وزن لگاکر اس کا کل وزن $\frac{1}{2}$ پونڈ کردیا گیا ہے، جس وقت کھلندن عین اوپر اوٹھنے کو ہو اُس وقت جوشدان کے اندر بھاپ کا دباؤ دریافت کرو۔

۹ ۔ ایک انجن کے جوشدان میں محافظ کھلندن کا وزن ۱۶ پونڈ ہے اور اس کی تراش $\frac{1}{5}$ مربع انچ ہے، بھاپ کے اُس دباؤ کی مقدار دریافت کرو جو محافظ کھلندن کو اٹھانے کے لئے عین کافی ہو۔

باب دوم

کثافت اور کثافتِ اضافی

۱۶ - **کثافت - تعریف** ایک متجانس الاجزا جسم کی کثافت سے مادہ کی وہ مقدار (یا کمیتِ مادہ) مراد ہے جو اس کے حجم کی ایک اکائی میں موجود ہو۔

اگر خالص پانی کی تپش ۴° سنتی گرید ہو تو اس کے ایک مکعب فٹ کی کمیت ۱۰۰۰ اونس یعنے $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ پانی کی کثافت $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ فی مکعب فٹ ہوتی ہے۔

ایک گرام اُس پانی کی مقدار مادہ ہے جس کی تپش ۴° سنتی گرید ہو اور جو ایک مکعب سنتی میتر جگہ کو بھر دے۔ اسلئے ۴° سنتی گرید تپش والے پانی کی کثافت ایک گرام فی مکعب سنتی میتر ہے۔

ہم نے گرام کی تعریف کرنے میں ایک خاص تپش والے پانی کو لینا ضروری سمجھا ہے، اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی کی ایک مفروضہ کمیت کا حجم بدلتا ہے جیسے تپش بدلتی ہے، اگر ہم پانی کی ایک خاص مقدار مادہ (مثلاً ۱ پونڈ) لیں اور اس کو نقطۂ جوش ۱۰۰° سنتی گرید (یعنی ۲۱۲° فارن ہیت) سے تبدیج ٹھنڈا کرنا شروع کریں تو معلوم ہوگا کہ اس کا حجم تبدیج کم ہوتا

جاتا ہے جبتک کہ تپش ۴° سنتی گرید (۳۹٫۲° فارین ہیت) نہ ہو جائے،
اگر تپش کو اور کم کیا جائے تو پانی کے ایک پونڈ کا حجم بڑھنے لگتا ہے
اور یہ بڑھتا جاتا ہے جبتک کہ درجۂ انجماد کی نوبت نہ آجائے، اس سے
معلوم ہوا کہ پانی کا ایک پونڈ ۴° سنتی گرید پر بہ نسبت کسی اور تپش
والے پانی کے کم جگہ گھیرتا ہے۔
یعنے پانی کے ایک دئے ہوئے حجم میں ۴° سنتی گرید پر بہ نسبت کسی
اور تپش کے زیادہ پانی ہوتا ہے۔
یعنی پانی کی کثافت ۴° سنتی گرید پر بہ نسبت کسی اور تپش کے زیادہ ہوتی ہے۔
پارہ کے ایک مکعب فٹ کی کمیت پانی کے ایک مکعب فٹ کی کمیت
کا ۱۳٫۵۹۶ گنا ہوتی ہے اس لئے پارہ کی کثافت تقریباً
۱۳٫۵۹۶ × $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ فی مکعب فٹ ہوتی ہے۔
اگر ہم سنتی میٹر، گرام اکائیاں استعمال کریں تو پارہ کی کثافت ۱۳٫۵۹۶
گرام فی مکعب سنتی میٹر ہوئی۔
۱۷ - بعض اوقات یہ مناسب ہوتا ہے کہ جو کثافتیں فٹ پونڈ نظام
میں بیان کی گئی ہوں ان کو س، گ، ث نظام میں منتقل کیا
جائے اور برعکس اس کے۔
جیسا دفعہ ۸ میں اس کا کچھ ذکر ہوا
۱ فٹ = ۳۰٫۴۸ سنتی میٹر، ۱ سنتی میٹر = ۰٫۰۳۲۸ فٹ
۱ پونڈ = ۴۵۳٫۶ گرام، ۱ گرام = ۰٫۰۰۲۲۰۴ پونڈ
اس لئے کثافت ایک پونڈ فی مکعب فٹ
= کثافت ۴۵۳٫۶ گرام فی $(۳۰٫۴۸)^۳$ مکعب سنتی میٹر

$=$ کثافت $\frac{۴۵۳،۶}{(۳۰،۴۸)^۳}$ گرام فی مکعب سنتی میتر

$=$ ۰،۰۱۶۰۲ گرام فی مکعب سنتی میتر تقریباً

اسی طرح سے کثافت ۱ گرام فی مکعب سنتی میتر

$=$ کثافت ۰،۰۰۲۲۰۴ پونڈ فی $(۰،۰۳۲۸)^۳$ مکعب فٹ

$=$ کثافت $\frac{۰،۰۰۲۲۰۴}{(۰،۰۳۲۸)^۳}$ پونڈ فی مکعب فٹ،

$=$ کثافت ۶۲،۴ پونڈ فی مکعب فٹ تقریباً

۱۸۔ اگر کسی شے کا وزن و ہو پونڈوں میں، ک اس کی کثافت ہوا فی مکعب فٹ پونڈوں میں، ح حجم ہو مکعب فٹوں میں اور س اسراع ہو فٹ، ثانیہ اکائیوں میں جو جاذبۂ ارض کی وجہ سے پیدا ہوتا ہو تو و = ج ک ح

کیونکہ اگر شے مذکورہ کی مقدار مادہ یا کمیت م ہو تو علم حرکت دفعہ ۶۸ کی رُو سے

و = م ج

نیز م = اس شے کے ح مکعب فٹوں کی کمیت

= ح × ایک مکعب فٹ کی کمیت

= ح × ک

∴ و = ج ح ک

اسی طرح کا ربط صحیح ہوگا اگر و کو ڈائنوں میں، ک کو گراموں میں فی مکعب سنتی میتر، ح کو مکعب

سنٹی میٹروں میں اور ج کو سنٹی میٹر/ثانیہ اکائیوں میں بیان کیا جائے۔

۱۹۔ کثافتِ اضافی ۔ تعریف کسی شے کی کثافتِ اضافی سے وہ نسبت مراد ہوتی ہے جو اس شے کے کسی حجم کے وزن کو معیاری شے کے مساوی حجم کے وزن کے ساتھ ہو۔

پس معلوم ہوا کہ کثافتِ اضافی ہمیشہ ایک **عدد** ہو گا۔
سہولت کی خاطر عام طور پر ہم سنٹی گریڈ کے پانی کو معیاری شے قرار دیتے ہیں۔ چونکہ پارہ کے ایک مکعب فٹ کا وزن پانی کے ایک مکعب فٹ کے وزن کا ۵۹۶ ، ۱۳ گنا ہوتا ہے۔ اس لئے پارہ کی کثافتِ اضافی عدد ۵۹۶ ، ۱۳ ہے۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ سونے کی کثافت اضافی ۲۵ ، ۱۹ ہے تو معیاری شے سے پانی مراد ہوتا ہے، پس ایسا کہنے سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ سونے کے ایک مکعب فٹ کا وزن پانی کے ایک مکعب فٹ کے وزن کا ۲۵ ، ۱۹ گنا ہے، یعنے سونے کے ایک مکعب فٹ کا وزن

$$= ۱۹،۲۵ \times ۶۲\tfrac{۱}{۲} \text{ پونڈ تقریباً}$$

$$= ۱۲۰۳\tfrac{۱}{۸} \text{ پونڈ وزن}$$

چونکہ جسموں کے وزن ان کی کمیتوں کے متناسب ہوتے ہیں اس لئے کثافت اضافی کی یہ تعریف بھی ہو سکتی ہے کہ کسی شے کی کثافتِ اضافی اس نسبت کو تعبیر کرتی ہے جو اس شے کے کسی حجم کی کمیت کو معیاری شے کے مساوی حجم کی کمیت کے

ساتھ ہو۔

بعض اوقات کسی شے کی کثافت اضافی کو اس کا "اضافی وزن" بھی کہتے ہیں۔

۲۰۔ گیسوں کی کثافت اضافی۔ چونکہ گیسیں پانی سے بہت ہلکی ہوتی ہیں اس لئے ان کی صورت میں پانی کو معیاری شے قرار نہیں دیتے بلکہ ان کی اضافی کثافتیں دریافت کرنے میں ان کے کسی حجم کے وزن کا مقابلہ ہوا کے مساوی حجم کے وزن سے کرتے ہیں۔ جس کی تپش ۰ سنتی گریڈ ہو جبکہ پارہ کے بارپیما (دفعہ ۹۲) کی بلندی ۷۶۰ ملی میٹر یعنی تقریباً ۳۰ انچ ہو۔ ان شرائط کے ماتحت ہوا کے ایک مکعب فٹ کی کمیت ۱٫۲۵ اونس ہوتی ہے۔

۲۱۔ ذیل کی جدول میں بعض مشہور اشیاء کی اضافی کثافتوں کی تقریبی قیمتیں مندرج ہیں۔

ٹھوس اشیا

شے	کثافت اضافی	شے	کثافت اضافی
پلاٹینم	۲۱٫۵	کلسی شیشہ	۲٫۵ سے ۲٫۷ تک
سونا	۱۹٫۲۵	سربی شیشہ	۳٫۰ سے ۳٫۵ تک
سیسا	۱۱٫۳	ہاتھی دانت	۱٫۹
چاندی	۱۰٫۵	شاہ بلوط	٫۷ سے ۱٫۰ تک
تانبا	۸٫۹	دیودار	۰٫۶
پیتل	۸٫۴	چنار	۰٫۴
لوہا	۷٫۸	کاک	۰٫۲۴

مائعات : سنتی گرید پر

پارہ	۱۳٫۵۹۶	دودھ	۱٫۰۳
گندک کا تیزاب	۱٫۸۵	الکحل	٫۸
گلسرین	۱٫۲۶	ایتھر	٫۷۳

۲۲- ایک جسم کی کثافتِ اضافی ض ہے، اس کے حجم ح کا وزن و ہے۔ اگر معیاری شے کے حجم کی اکائی کا وزن و۱ ہو تو ثابت کرو کہ

و = ح × ض × و۱

چونکہ ض = (جسم کے حجم کی ایک اکائی کا وزن) / (معیاری شے کے حجم کی ایک اکائی کا وزن)

∴ جسم کے حجم کی ایک اکائی کا وزن = ض × و۱

∴ جسم کے حجم کی ح اکائیوں کا وزن = ح × ض × و۱

∴ و = ح × ض × و۱

نتیجہ صریح- اگر س، گ، ث نظام کی اکائیاں استعمال کی جائیں تو

و۱ = پانی کے ایک مکعب سنتی میٹر کا وزن
= ایک گرام

∴ و = ح × ض گرام یعنے اگر س، گ، ث نظام کے موافق کسی جسم کا وزن گراموں میں دریافت کرنا ہو تو اس کی

کثافت اِضافی کو اس کے حجم کے ساتھ جو مکعب سنتی میٹروں میں بیان گیا گیا ہو ضرب دینا چاہئے۔

مثال۔ اگر پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہو تو تانبے کے ۴ مکعب گزوں کا وزن دریافت کرو تانبے کی کثافت اضافی ۸٫۸ ہے

اس صورت میں و = $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ وزن، ح = ۱۰۸ مکعب فٹ اور ض = ۸٫۸

∴ و = ۱۰۸ × ۸٫۸ × $\frac{1}{2}$ ۶۲ = ۵۹۴۰۰ پونڈ وزن

= $\frac{۲۹}{۵۶}$ ۲۶ ٹن وزن

۲۳۔ بعض اوقات جملہ "ذاتی وزن" کو استعمال کرتے ہیں ایک شے کے ذاتی وزن سے اس شے کے حجم کی ایک اکائی کا وزن مراد ہوتا ہے، پس جیسا دفعہ سابق میں بیان ہوا کسی جسم کا ذاتی وزن = ض × و، اور اس لئے و = ح × اس شے کا ذاتی وزن۔

امثلہ نمبری ۲

[ان تمام مثالوں میں یہ مان لیا جائے کہ پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہے]

۱۔ لوہے کے ایک مکعب فٹ کا وزن دریافت کرو [لوہے کی کثافت اضافی = ۹]

۲۔ پیتل کی کثافت اضافی ۸ ہے، اس کی کثافت فی مکعب انچ اونسوں میں دریافت کرو، یہ معلوم ہے کہ پانی کی کثافت فی مکعب فٹ ۱۰۰۰ اونس ہے

۳۔ پانی کے ایک گیلن کا وزن ۱۰ پونڈ ہے اور پارہ کی کثافت اضافی ۱۳٫۵۹۸ ہے، پارہ کے ایک گیلن کا وزن دریافت کرو۔

۴۔ معیاری تپش والے پارہ کے ایک لیٹر (ایک مکعب دسی میتر یا ۱۰۰۰ مکعب سنتی میتر) کا وزن دریافت کرو جبکہ اس کی کثافت اضافی ۱۳٫۶ ہو۔

۵۔ اگر ۱۳ مکعب انچ سونے کا وزن اتنا ہو جتنا کہ ۹۶ ¼ مکعب انچ بلور کا اور سونے کی کثافت اضافی ۱۹٫۲۵ ہو تو بلور کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۶۔ اگر سونے کی کثافتِ اضافی ۱۹٫۲۵ ہو تو معلوم کرو کہ کتنے مکعب فٹ سونے کا وزن ایک ٹن ہوگا۔

۷۔ ڈھلے ہوئے تانبے کی کثافت اضافی ۸٫۸۸ ہے اور تانبے کے تار کی ۸٫۹۷، اگر ایک کلوگرام ڈھلے ہوئے تانبے کا تار کھینچا جائے تو معلوم کرو کہ اس کے حجم میں کیا تبدیلی واقع ہو گی۔

۸۔ ایک لوہے کا نل ایک فٹ لمبا ہے اس کا سوراخ قطر میں ۴ انچ ہے، دھات کی موٹائی ½ ۱ انچ اور نل کا وزن فی فٹ ۶۴٫۴ پونڈ ہے، لوہے کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۹۔ ایک سلاخ کا طول ۱۸ انچ ہے، وزن ۳ اونس اور کثافت اضافی ۸٫۸، اگر اس کی عمودی تراش یکساں ہو تو اس تراش کا رقبہ دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کرہ کا نصف قطر ۴۵ سنتی میتر ہے اور اس کا وزن ۲۳۷۶ کلوگرام ہے، اس کی کثافت معلوم کرو۔ $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

۱۱۔ تانبے کی کثافت اضافی ۸٫۹ ہے، معلوم کرو کہ تانبے کے کتنے حجم کا

وزن ۱۳۹۱٫۶۲۵ کلو گرام ہو گا۔

۱۲۔ کسی دھات کے ۹ مکعب فٹ کی کمیت ۴۹۰۰ پونڈ ہے، اسکی کثافت گراموں میں فی مکعب سنتی میٹر دریافت کرو۔

۱۳۔ لکڑی کے ۴۵ مکعب میٹر کی کمیت ۳۶۰۰۰ کلو گرام ہے، اس کی کثافت پونڈوں میں فی مکعب فٹ دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک نامکمل طور پر ڈھلی ہوئی دھات کے ایک پترے کی کثافت اضافی ۶٫۲ ہے۔ اگر یہ معلوم ہو کہ پورے طور پر ڈھلی ہوئی دھات کی کثافتِ اضافی ۷٫۵ ہوتی ہے تو بتاؤ کہ اس ٹکڑے کے کتنے فیصد حجم میں دھات موجود نہیں ہے۔

۲۴۔ **آمیزوں کی اضافی کثافتیں**۔ ایک آمیزہ مختلف اشیا کو ملانے سے بنایا گیا ہے، اشیا کے حجم اور اضافی کثافتیں معلوم ہیں، آمیزہ کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مختلف اشیا کے حجم $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$.... ہیں
اور اضافی کثافتیں $ض_1$، $ض_2$، $ض_3$،... ہیں
پس مختلف اشیا کے وزن دفعہ ۲۲ کی رو سے

$ح_1 ض_1 و_1$، $ح_2 ض_2 و_1$، $ح_3 ض_3 و_1$،...... ہوئے
جہاں معیاری شے کے ایک اکائی حجم کا وزن $و_1$ ہے۔

(۱) فرض کرو کہ اشیا کے ملانے سے حجم میں کمی واقع نہیں ہوتی،
پس آخری حجم $ح_1 + ح_2 + ح_3 + ...$ ہوگا۔
فرض کرو کہ نئی کثافتِ اضافی $ض$ ہے، پس اشیا کے وزنوں کا مجموعہ

$$= (ح_1 + ح_2 + ح_3 ......) ض \times و_1$$

اب چونکہ وزنون کے مجموعہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوسکتی اس لئے

$$[\text{ح}_1+\text{ح}_2+\text{ح}_3+\cdots]\,\bar{\text{ض}}\times\text{و}=\text{ح}_1\text{ض}_1\,\text{و}+\text{ح}_2\text{ض}_2\,\text{و}+\text{ح}_3\text{ض}_3\,\text{و}+\cdots$$

$$\therefore\ \bar{\text{ض}}=\frac{\text{ح}_1\text{ض}_1+\text{ح}_2\text{ض}_2+\text{ح}_3\text{ض}_3+\cdots}{\text{ح}_1+\text{ح}_2+\text{ح}_3+\cdots\cdots}$$

(۲) اگر اشیا کے ملانے سے کل حجم میں کمی واقع ہو جیسا کہ بعض اوقات ہوتا ہے تو فرض کرو کہ آخری حجم ابتدائی حجمون کے مجموعہ کا ن گنا ہے جہاں ن کوئی کسر واجب ہے۔
اس صورت میں

$$\text{ن}[\text{ح}_1+\text{ح}_2+\text{ح}_3+\cdots]\,\bar{\text{ض}}\,\text{و}=\text{ح}_1\text{ض}_1\,\text{و}+\text{ح}_2\text{ض}_2\,\text{و}+\text{ح}_3\text{ض}_3\,\text{و}+\cdots$$

$$\text{پس}\ \bar{\text{ض}}=\frac{\text{ح}_1\text{ض}_1+\text{ح}_2\text{ض}_2+\text{ح}_3\text{ض}_3+\cdots}{\text{ن}[\text{ح}_1+\text{ح}_2+\text{ح}_3+\cdots\cdots]}$$

اگر اضافی کثافتوں کی بجائے کثافتیں دی ہوئی ہون تو بھی اس قسم کے ضابطے صادق آئینگے صرف اضافی کثافتوں ض_1، ض_2، .... کی بجائے ک_1، ک_2، .... اور آخری کثافتِ اضافی $\bar{\text{ض}}$ کی بجائے آخری کثافت $\bar{\text{ک}}$ لکھہ دینا کافی ہوگا

مثال۔ تین مائعات کے حجم اعداد ۱، ۲، ۳ کے متناسب ہیں اور ان کی اضافی کثافتیں ۱٫۲، ۱٫۴، ۱٫۶ کے متناسب ہیں ان تینون کو ملادیا گیا

آمیزہ کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

فرض کروکہ مائعات کے حجم لا ، ۲ لا ، ۳ لا ہیں
ان کے اوزان بالترتیب $و_1$ لا × ۱٫۲ ، $و_1$ × ۲ لا × ۱٫۴ ، $و_1$ × ۳ لا × ۱٫۶ ہونگے
اگر آمیزہ کی کثافتِ اضافی $\bar{ض}$ ہو تو اسکا کل وزن $و_1 \bar{ض}$ (لا + ۲ لا + ۳ لا) ہوگا۔

ان دونوں کو مساوی رکھنے سے

$$۶\, و_1 \bar{ض}\, لا = و_1\, لا \times ۸٫۸$$

$$\therefore \bar{ض} = \frac{1}{6} \times ۸٫۸ = ۱٫۴\dot{۶}$$

۲۵ – ایک آمیزہ مختلف اشیا کے مفروضہ وزنوں کو باہم ملانے سے بنایا گیا ہے، اشیا کے اضافی کثافتیں معلوم ہیں ، آمیزہ کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

فرض کروکہ اشیا معلومہ کے وزن $وَ$ ، $وً$ ... ہیں اور ان کی اضافی کثافتیں بالترتیب $ضَ$ ، $ضً$ ..... ہیں اور جس معیّن شے کو معیار مانا گیا ہے اس کے حجم کی ایک اکائی کا وزن $و_1$ ہے۔

دفعہ ۲۲ کی رو سے مختلف اشیا کے حجم

$$\frac{وَ}{ضَ\, و_1} ، \frac{وً}{ضً\, و_1} ، \ldots\ldots \text{ہیں}$$

اگر آمیزہ بنانے میں حجم کی کوئی کمی واقع نہو تو نیا حجم

$$\frac{وَ}{ضَ\, و_1} + \frac{وً}{ضً\, و_1} + \ldots\ldots \text{ہوگا}$$

اس لئے اگر نئی کثافت $ض$ ہو تو اشیا کے وزنوں کا مجموعہ

دفعہ ۲۲ کی رُو سے

$$\left(\frac{\text{وَ}}{\text{ضَ وِ}} + \frac{\text{وً}}{\text{ضً وِ}} + \cdots\cdots\right)\overline{\text{ضَ}}\ \text{وِ}$$ یعنی

$$\left(\frac{\text{وَ}}{\text{ضَ}} + \frac{\text{وً}}{\text{ضً}} + \cdots\cdots\right)\overline{\text{ضَ}}$$ ہوگا۔

اب چونکہ وزنوں کا مجموعہ ہر صورت میں وہی رہتا ہے

اسلئے $$\left(\frac{\text{وَ}}{\text{ضَ}} + \frac{\text{وً}}{\text{ضً}} + \cdots\right)\overline{\text{ضَ}} = \text{وَ} + \text{وً} + \cdots\cdots$$

یعنی $$\overline{\text{ضَ}} = \frac{\text{وَ} + \text{وً} + \cdots\cdots}{\frac{\text{وَ}}{\text{ضَ}} + \frac{\text{وً}}{\text{ضً}} + \cdots\cdots}$$

اگر آمیزہ بنانے میں حجم کی کمی واقع ہو اور آخری حجم ابتدائی حجموں کے مجموعہ کا ن گنا ہو تو دفعہ آخر کے مطابق

$$\overline{\text{ضَ}} = \frac{\text{وَ} + \text{وً} + \cdots\cdots}{\text{ن}\left[\frac{\text{وَ}}{\text{ضَ}} + \frac{\text{وً}}{\text{ضً}} + \cdots\right]}$$

اسی طرح کے ضابطہ سے آخری کثافت، وزنوں اور ابتدائی کثافتوں کی رقوم میں حاصل ہو سکتی ہے۔

مشق۔ ایک مائع کی کثافتِ اضافی ۱٫۲۵ ہے، اس کے ۱۰ پونڈ وزن کو ایک اور مائع کے ۶ پونڈ وزن کے ساتھ ملا دیا گیا ہے، دوسرے مائع کی کثافت اضافی ۱٫۱۵ ہے۔ آمیزہ کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

اگر پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $و_۱$ ہو تو دونوں مائعات کے جداگانہ حجم دفعہ ۲۲ کی رُو سے مفصلہ ذیل ہوں گے۔

$$\frac{۱۰}{۱٫۲۵ \times و_۱} \quad \text{اور} \quad \frac{۶}{۱٫۱۵ \times و_۱} \quad \text{مکعب فٹ}$$

اگر مطلوبہ کثافت اضافی $\overline{ض}$ ہو تو

$$\left(\frac{۱۰}{۱٫۲۵ \times و_۱} + \frac{۶}{۱٫۱۵ \times و_۱} \right) \overline{ض} \times و_۱ = \text{کل وزن} = \ldots$$

$$\therefore \overline{ض} \left[۸ + \frac{۱۲۰}{۲۳} \right] = ۱۶$$

$$\therefore \overline{ض} = \frac{۲۳ \times ۱۶}{۳۰۴} = \frac{۲۳}{۱۹} = \ldots ۱٫۲۱۰$$

امثلہ نمبری ۳

۱۔ ایک مائع کی کثافتِ اضافی بلحاظ پانی کے ۸ر ہے، اس میں کس نسبت سے پانی ملایا جائے کہ نئے مائع کی کثافتِ اضافی ۸۵ر ہو جائے۔

۲۔ ایک مائع کی کثافت اضافی ۱ر۱ ہے، اس کا ۱۲ پونڈ وزن ایک اور مائع کے ۲۰ پونڈ وزن کے ساتھ ملایا گیا ہے، دوسرے مائع کی کثافت اضافی ۹ر ہے آمیزہ کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

۳۔ ایک مائع کی کثافت ۹ر گرام فی مکعب سنتی میتر ہے، اس کے ۳۹ مکعب سنتی میتر حجم کو ایک اور مائع کے ۵۱ مکعب سنتی میتر حجم کے ساتھ ملایا گیا ہے، اگر دوسرے مائع کی کثافت ۷۵ر گرام فی مکعب

سنتی میٹر ہو تو آمیزہ کی کثافت دریافت کرو۔

۴۔ ایک نمک کے محلول کی اضافی کثافت ۱.۰۸ ہے، بتاؤ اس کے ۲۷ اونس وزن میں اور کتنا پانی ملایا جائے کہ آمیزہ کی اضافی کثافت ۱.۰۵ ہو جائے۔

۵۔ لکڑی کے ایک ٹکڑے کو لوہے کے ۵۰۰ اونس کے ایک ٹکڑے کے ساتھ باندھا گیا ہے، اگر کل کی اوسط کثافتِ اضافی ایک ہو، لکڑی کی ۰.۵، اور لوہے کی ۷، تو لکڑی کے ٹکڑے کا حجم دریافت کرو۔

۶۔ جست اور تانبے کا ملوان دھات یا بھرت تیار کیا گیا ہے، جست اور تانبے کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۷ اور ۸.۹ ہیں، اگر بھرت کا حجم ۴۵۲ مکعب سنتی میٹر ہو اور اس کی مقدار مادہ ۳۴۳۷ گرام ہو تو اس کے اجزائے ترکیبی کے حجم دریافت کرو۔

۷۔ تین مساوی ظرف ا، ب، ج ہیں، ان کو ایسے تین مائعات سے آدھا آدھا بھر دیا گیا ہے جن کی کثافتیں بالترتیب ک، ک، ک ہیں۔ اگر ب کو ا سے بھرا جائے اور پھر ج کو ب سے، تو معلوم کرو کہ ج کے اندر جو مائع ہے اس کی کثافت کیا ہے۔ اس مثال میں فرض کرلیا گیا ہے کہ مائعات پورے طور پر ایک دوسرے سے ملجاتے ہیں۔

۸۔ اگر دو اشیا کے مساوی حجموں کو ملایا جائے تو آمیزہ کی اضافی کثافت ۴ ہوتی ہے۔ اگر انہی اشیا کے مساوی وزنوں کو ملایا جائے تو آمیزہ کی اضافی کثافت ۳ ہوتی ہے، اشیا کی اضافی کثافتیں دریافت کرو۔

۹۔ کشید کئے ہوئے پانی اور الکحل کے مساوی حجمون کو باہم ملا کر دیکھا گیا ہے کہ جب آمیزہ اپنی سابق تپش پر آتا ہے تو اس وقت اس کا حجم اصلی مائعات کے حجمون کے مجموعہ سے ۴ فیصد کم ہو جاتا ہے۔ آمیزہ کی اضافی کثافت دریافت کرو جبکہ الکحل کی کثافتِ اضافی ۰٫۸۶ ہو۔

۱۰۔ گندک کے تیزاب (اضافی کثافت = ۱٫۸۴۳) کے ۱ مکعب سنتی میتر حجم کو کشید کئے ہوئے پانی کے ۳ مکعب سنتی میتر کے ساتھ ملایا گیا ہے۔ ٹھنڈا ہونے پر آمیزہ کی کثافتِ اضافی ۱٫۶۱۵ ہوتی ہے۔ معلوم کرو کہ حجم میں کیا کمی واقع ہوئی ہے۔

۱۱۔ اگر ایک مائع ا کی ایک مقدار کو مائع ب کے ن پونڈ وزن کے ساتھ ملایا جائے تو آمیزہ کی اضافی کثافت ض ہوتی ہے، اگر ب کے ۲ ن پونڈ کے ساتھ ملایا جائے تو اضافی کثافت ضَ ہوتی ہے اگر ب کے ۳ ن پونڈ کے ساتھ ملایا جائے تو اضافی کثافت ضً ہوتی ہے، ا اور ب کی اضافی کثافتین ض۱ اور ض۲ معلوم کرنے کی مساواتین دریافت کرو۔

باب سوم

ساکن متجانس الاجزا سیّال کے مختلف نقطوں پر دباؤ

۲۶- اگر ایک سیال کے مختلف حصّوں سے مساوی حجم لئے جائیں اور ان حجموں کی کمیتیں ہمیشہ مساوی ہوں خواہ یہ حجم کتنے ہی قلیل ہوں تو ایسے سیال کو متجانس الاجزا سیّال کہتے ہیں۔

۲۷- ایک وزنی، متجانس الاجزا سیّال کا دباؤ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر وہی ہوتا ہے۔

سیال کے اندر دو نقطے ن اور ق لو جو ایک ہی افقی سطح پر واقع ہوں۔

ن ق کو ملاؤ اور سیال کے ایک چھوٹے سے حصے ن ق پر غور کرو جس کی شکل ایک پتلے اسطوانہ کی ہے اور جس کا محور ن ق ہے۔

اس اسطوانہ پر محور ن ق کی سمت میں عمل کرنے والی صرف دو قوتیں ہیں اور وہ ن اور ق پر کے دباؤ ہیں جو اسطوانہ کے مستوی سروں پر عمل کرتے ہیں۔

[باقی سب قوتیں جو اسطوانہ پر عمل کرتی ہیں ن ق پر عمود وار ہیں، اس لئے ن ق کی سمت میں ان کا اثر کچھ نہیں ہے]

اسلئے توازن کی لازمی شرط یہ ہے کہ یہ دباؤ مساوی اور متقابل ہوں۔

اب فرض کرو کہ اسطوانہ کے ان مستوی سروں کا رقبہ نہایت ہی کم کردیا گیا ہے، اس صورت میں سروں پر کے دباؤ فی اکائی رقبہ مستقل خیال کئے جا سکتے ہیں اور ہم اُن کو بالترتیب ن اور ق پر کے دباؤ کے مساوی خیال کرسکتے ہیں۔

اس لئے ن پر کا دباؤ × ن پر کے مستوی سرے کا رقبہ
= ق پر کا دباؤ × ق پر کے مستوی سرے کا رقبہ

اس لئے ن پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ

۲۸۔ ایک وزنی متجانس مائع کی کسی مفروضہ گہرائی پر کا دباؤ دریافت کرو اور ایسا کرنے میں کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظر انداز کرو۔

مائع کے اندر کوئی نقطہ ن لو اور ایک انتصابی خط ن ا ایسا کھینچو جو مائع کی سطح کو نقطہ ا پر ملے۔

مائع کے ایک پتلے اسطوانہ پر غور کرو جس کا محور ن ا ہے، یہ اسطوانہ اُن قوتوں کے زیر عمل جو اس پر عمل کرتی ہیں متوازن ہے۔

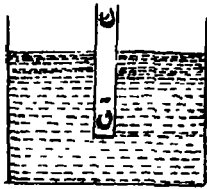
اس اسطوانہ پر عمل کرنے والی انتصابی قوتیں صرف دو ہیں، ایک تو اس کا وزن، دوسرے وہ قوت یا دباؤ جو باقی ماندہ سیال ن پر کے مستوی سرے پر ڈالتا ہے۔
اگر مستوی سرے کا رقبہ ل ہو اور گہرائی ان = لا تو مائع کے اس چھوٹے اسطوانے کا وزن و × ل × لا ہوگا جہاں و مائع کا ذاتی وزن ہے۔
نیز انتصابی قوت جو ن پر کے مستوی سرے پر عمل کرتی ہے د × ل ہے جہاں د نقطہ ن پر کا دباؤ فی اکائی رقبہ ہے
اس لئے د × ل = و × ل × لا
∴ د = و × لا

نتیجہ صریح۔ چونکہ ایک مائع کے کسی نقطہ پر کا دباؤ صرف اس نقطہ کی گہرائی پر منحصر ہے اس لئے معلوم ہوا کہ ایک حوض کی پشتہ بندی کو کافی طور پر مضبوط بنانے کے لئے ہمیں صرف پانی کی گہرائی کو ملحوظ رکھنا چاہئے نہ کہ سطح کی وسعت کو۔
۲۹۔ دفعہ گذشتہ میں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنے کے لئے ایک جملہ دیا گیا ہے۔ اس کے اندر جو مقداریں شامل ہیں ان کی اکائیوں کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہئے، اگر انگریزی اکائیاں

استعمال کی جائیں تو ل گہرائی ہے فٹوں میں، و وزن ہے مائع
کے ایک مکعب فٹ کا اور د دباؤ ہے فی مربع فٹ پونڈوں کے وزن میں
اگر س، گ، ث اکائیاں استعمال کی جائیں تو ل گہرائی ہوگی
سنتی میٹروں میں، و وزن ہوگا مائع کے ایک مکعب سنتی میٹر
کا، اور د دباؤ ہوگا فی مربع سنتی میٹر گراموں میں۔ پانی کی صورت
میں یاد رہے کہ و ایک گرام کے وزن کے مساوی ہے۔

۳۰۔ مسئلہ دفعہ ۲۸ کی تصدیق بذریعہ تجربہ اس طرح ہوسکتی ہے
ایک مجوف اسطوانہ ن ق ہے جس کا ایک سرا ق ایک پتلی،
ہلکی، چپٹی تختی سے بند کیا گیا ہے جو اس سرے پر خوب
پھنس کر آتی ہے۔ اسطوانہ اور تختی کو پانی میں اس طرح دھکیل
دیا جاتا ہے کہ اسطوانہ ہمیشہ انتصابی حالت میں رہتا ہے۔ ایسا
کرنے سے تختی اسطوانہ سے الگ نہیں ہو جائے گی کیونکہ پانی کا
دباؤ اسے تھامے ہوئے ہے۔

اب اسطوانہ کے اوپر کے سرے میں آہستہ سے پانی ڈالا جاتا
ہے، تجربہ سے معلوم ہوگا کہ تختی اس وقت تک نہیں گرتی
جب تک کہ اسطوانہ کے اندر کے پانی کی بلندی قریب قریب
باہر کے پانی کی بلندی کے برابر نہو جائے، نیز جتنا تختی کا وزن
کم ہوگا اتنا ہی ان بلندیوں کا
باہمی فرق کم ہوگا۔

فرض کرو کہ نقطہ ق کی گہرائی
گ ہے اور اسطوانہ کے سرے کا

= ۲۵۶×و فی مربع فٹ

= ۲۵۶ × $\frac{1}{2}$۶۲ پونڈ وزن فی مربع فٹ

= $\frac{۱۶۰۰۰}{۱۴۴}$ پونڈ وزن فی مربع انچ

= $\frac{1}{9}$۱۱۱ پونڈ وزن فی مربع انچ

مشق ۲۔ پانی کے اندر ۱۰ میٹر کی گہرائی پر کا دباؤ دریافت کرو جبکہ کرہ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ۷۶۰ ملی میٹر ارتفاع کے مساوی ہے اور پارہ کی اضافی کثافت بلحاظ پانی کے ۱۳٫۶ ہے۔

یہاں ∏ = کرہ ہوائی کا دباؤ فی مربع سنتی میٹر
= ۷۶ سنتی میٹر اونچے ستون کا وزن
= پارہ کے ۷۶ مکعب سنتی میٹر کا وزن
= ۷۶ × ۱۳٫۶ گرام

∴ د = ∏ + و × ۱۰۰۰ = (۷۶ × ۱۳٫۶ + ۱۰۰۰) گرام وزن فی مربع سنتی میٹر

اب چونکہ و = پانی کے ایک مکعب سنتی میٹر کا وزن = ۱ گرام

∴ د = ۲۰۳۳٫۶ گرام فی مربع سنتی میٹر

۳۴۔ حالت سکون میں ایک وزنی مائع کی سطح ہموار ہوتی ہے

۹۔ کشید کئے ہوئے پانی اور الکحل کے مساوی حجموں کو باہم ملاکر دیکھا گیا ہے کہ جب آمیزہ اپنی سابق تپش پر آتا ہے تو اُس وقت اس کا حجم اصلی مائعات کے حجموں کے مجموعہ سے ۴ فیصد کم ہوجاتا ہے، آمیزہ کی اضافی کثافت دریافت کرو جبکہ الکحل کی کثافتِ اضافی ۰٫۸ ہو۔

۱۰۔ گندک کے تیزاب (اضافی کثافت = ۱٫۸۴۳) [illegible] مکعب سنٹی میٹر حجم کو کشید کئے ہوئے پانی کے ۲۰ مکعب سنٹی میٹر حجم کے ساتھ ملایا گیا ہے۔ ٹھنڈا ہونے پر آمیزہ کی کثافتِ اضافی ۱٫۶۱۵ ہوتی ہے۔ معلوم کرو کہ حجم میں کیا کمی واقع ہوئی ہے۔

۱۱۔ اگر ایک مائع ا کی ایک مقدار کو مائع ب کے ن پونڈ وزن کے ساتھ ملایا جائے تو آمیزہ کی اضافی کثافت ض ہوتی ہے، اگر ب کے ۲ ن پونڈ کے ساتھ ملایا جائے تو اضافی کثافت ضَ ہوتی ہے اگر ب کے ۳ ن پونڈ کے ساتھ ملایا جائے تو اضافی کثافت ضً ہوتی ہے، ا اور ب کی اضافی کثافتیں ض۱ اور ض۲ معلوم کرنے کی مساواتیں دریافت کرو۔

باب سوم

ساکن، متجانس الاجزا سیال کے مختلف نقطوں پر دباؤ

۲۶- اگر ایک سیال کے مختلف حصوں سے مساوی حجم لئے جائیں اور ان حجموں کی کمیتیں ہمیشہ مساوی ہوں خواہ یہ حجم کتنے ہی قلیل ہوں تو ایسے سیال کو متجانس الاجزا سیال کہتے ہیں۔

۲۷- ایک وزنی، متجانس الاجزا سیال کا دباؤ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر وہی ہوتا ہے۔

سیال کے اندر دو نقطے ن اور ق لو جو ایک ہی افقی سطح پر واقع ہوں۔

ن ق کو ملاؤ اور سیال کے ایک چھوٹے سے حصے ن ق پر غور کرو جس کی شکل ایک پتلے اسطوانہ کی ہے اور جس کا محور ن ق ہے۔

اس اسطوانہ پر محور ن ق کی سمت میں عمل کرنے والی صرف دو قوتیں ہیں اور وہ ن اور ق پر کے دباؤ ہیں جو اسطوانہ کے مستوی سروں پر عمل کرتے ہیں۔
[باقی سب قوتیں جو اسطوانہ پر عمل کرتی ہیں ن ق پر عمود وار ہیں، اس لئے ن ق کی سمت میں ان کا اثر کچھ نہیں ہے۔]
اسلئے توازن کی لازمی شرط یہ ہے کہ یہ دباؤ مساوی اور متقابل ہوں۔
اب فرض کرو کہ اسطوانہ کے ان مستوی سروں کا رقبہ نہایت ہی کم کردیا گیا ہے، اس صورت میں سروں پر کے دباؤ فی اکائی رقبہ مستقل خیال کئے جا سکتے ہیں اور ہم ان کو بالترتیب ن اور ق پر کے دباؤ کے مساوی خیال کرسکتے ہیں۔
اس لئے ن پر کا دباؤ × ن پر کے مستوی سرے کا رقبہ
= ق پر کا دباؤ × ق پر کے مستوی سرے کا رقبہ
اس لئے ن پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ
۲۸۔ ایک وزنی متجانس مائع کی کسی مفروضہ گہرائی پر کا دباؤ دریافت کرو اور ایسا کرنے میں کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظر انداز کرو۔
مائع کے اندر کوئی نقطہ ن لو اور ایک انتصابی خط ن ا ایسا کھینچو جو مائع کی سطح کو نقطہ ا پر ملے۔
مائع کے ایک پتلے اسطوانہ پر غور کرو جس کا محور ن ا ہے، یہ اسطوانہ ان قوتوں کے زیر عمل جو اس پر عمل کرتی ہیں متوازن ہے۔

اس اسطوانہ پر عمل کرنے والی انتصابی قوتیں صرف دو ہیں، ایک تو اس کا وزن، دوسرے وہ قوت یا دباؤ جو باقی ماندہ سیال، ن پر کے مستوی سرے پر ڈالتا ہے۔

اگر مستوی سرے کا رقبہ ل ہو اور گہرائی ان = لا تو مائع کے اس چھوٹے اسطوانے کا وزن وا × ل × لا ہوگا جہاں وا مائع کا ذاتی وزن ہے۔

نیز انتصابی قوت جو ن پر کے مستوی سرے پر عمل کرتی ہے د × ل ہے جہاں د نقطہ ن پر کا دباؤ فی اکائی رقبہ ہے

اس لئے د × ل = وا × ل × لا

∴ د = وا × لا

نتیجہ صریح۔ چونکہ ایک مائع کے کسی نقطہ پر کا دباؤ صرف اس نقطہ کی گہرائی پر منحصر ہے اس لئے معلوم ہوا کہ ایک حوض کی پشتہ بندی کو کافی طور پر مضبوط بنانے کے لئے ہمیں صرف پانی کی گہرائی کو ملحوظ رکھنا چاہئے نہ کہ سطح کی وسعت کو

۲۹۔ دفعہ گذشتہ میں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنے کے لئے ایک جملہ دیا گیا ہے۔ اس کے اندر جو مقداریں شامل ہیں انکی اکائیوں کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہئے، اگر انگریزی اکائیان

استعمال کی جائیں تو لا گہرائی ہے فٹون میں، و وزن ہے مائع
کے ایک مکعب فٹ کا اور د دباؤ ہے فی مربع فٹ پونڈون کے وزن میں۔
اگر س، گ، ث اکائیاں استعمال کی جائیں تو لا گہرائی ہوگی
سنتی میٹرون میں، و وزن ہوگا مائع کے ایک مکعب سنتی میٹر
کا، اور د دباؤ ہوگا فی مربع سنتی میٹر گرامون میں۔ پانی کی صورت
میں یاد رہے کہ و ایک گرام کے وزن کے مساوی ہے۔

۳۰۔ مسئلہ دفعہ ۲۸ کی تصدیق بذریعہ تجربہ اس طرح ہوسکتی ہے
ایک مجوف اسطوانہ ن ق ہے جس کا ایک سرا ق ایک پتلی،
ہلکی، چپٹی تختی سے بند کیا گیا ہے جو اس سرے پر خوب
پھنس کر آتی ہے۔ اسطوانہ اور تختی کو پانی میں اس طرح دھکیل
دیا جاتا ہے کہ اسطوانہ ہمیشہ انتصابی حالت میں رہتا ہے۔ ایسا
کرنے سے تختی اسطوانہ سے الگ نہیں ہو جائے گی کیونکہ پانی کا
دباؤ اسے تھامے ہوئے ہے۔

اب اسطوانہ کے اوپر کے سرے میں آہستہ سے پانی ڈالا جاتا
ہے، تجربہ سے معلوم ہوگا کہ تختی اس وقت تک نہیں گرتی
جب تک کہ اسطوانہ کے اندر کے پانی کی بلندی قریب قریب
باہر کے پانی کی بلندی کے برابر نہ ہو جائے، نیز جتنا تختی کا وزن
کم ہوگا اتنا ہی ان بلندیون کا
باہمی فرق کم ہوگا۔
فرض کرو کہ نقطہ ق کی گہرائی
گ ہے اور اسطوانہ کے سر کا

رقبہ ل ہے، اب چونکہ بیرونی سیال کا دباؤ ق پر، اندرونی سیال کے وزن کے ساتھ متوازن ہے اور یہ وزن ل×گ×د یعنی ل×د×گ ہے اس لئے معلوم ہوا کہ ق پہ کا بیرونی دباؤ فی اکائی رقبہ د×گ ہے۔

۳۱۔ دفعہ ۲۸ میں ہم نے کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظر انداز کیا ہے یعنی ا پہ کے دباؤ کو صفر مان لیا ہے۔ اگر اس دباؤ کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو اس صورت میں جبکہ یہ دباؤ π ہو دفعہ مذکورہ کی مساوات یہ ہو جائے گی

$$د \times ل = د \times ل \times ۷ + \pi \times ل$$

$$\text{یعنی } د = د ۷ + \pi$$

کرہ ہوائی کا دباؤ تقریباً ۱۵ پونڈ وزن فی مربع انچ کے برابر ہے [اس دباؤ کو "۱۵ پونڈ فی مربع انچ" کہتے ہیں]

کرۂ ہوائی کے دباؤ کو اسطرح بیان کرنے کے بجائے کہ "یہ اتنے پونڈ وزن فی مربع انچ ہے" اکثر اوقات اس طرح بیان کرتے ہیں کہ دباؤ مذکور پانی یا پارہ کے ایک خاص بلندی والے ستون کے دباؤ کے برابر ہے۔

اس کا مطلب یہی ہے (جیسا ہمیں باب ہفتم سے معلوم ہوگا) کہ مائع مذکور کے بار پیما کا ارتفاع دیا ہوا ہے۔ مثلاً اگر ہمیں معلوم ہو کہ آبی بار پیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہے تو اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کرۂ ہوائی کا دباؤ فی مربع فٹ

= پانی کے ایک ستون کا وزن جس کا قاعدہ ایک مربع فٹ ہے
اور جس کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہے

= ۳۴ مکعب فٹ پانی کا وزن

= ۳۴ × $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ وزن

اس لئے کرہ ہوائی کا دباؤ فی مربع انچ

= $\frac{۶۲\frac{1}{2} \times ۳۴}{۱۲^۲}$ پونڈ وزن

= $۱۴\frac{۱۰۹}{۱۴۴}$ پونڈ وزن

اِسی بات کو بعض اوقات اس طرح بیان کرتے ہیں کہ دباؤ مذکور پانی کے "۳۴ فٹ اونچے سر" یا ۳۴ فٹ ارتفاع کی وجہ سے پیدا ہوا ہے۔

ایک فرضی افقی سطح کو جس کا ارتفاع ہموار سطح **ب ج** (شکل دفعہ ۲۸) سے آبی بارپیما کے ارتفاع کے مساوی ہو **مؤثر سطح** کہتے ہیں، پانی کے کسی نقطہ پر کا دباؤ اس صورت میں نقطہ کی اُس گہرائی کے متناسب ہوگا جو مؤثر سطح سے ناپی گئی ہو۔

مشق ۱۔ اگر آبی بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو تو پانی کے اندر ۲۲۲ فٹ کی گہرائی پر کا دباؤ دریافت کرو۔

اگر ایک مکعب فٹ پانی کا وزن و، ہو تو

 П = و، × ۳۴ پونڈ وزن

د = П + و، × گ = و، × ۳۴ + و، × ۲۲۲

= ۲۵۶ × و۱ فی مربع فٹ

= ۲۵۶ × ۶۲ ½ پونڈ وزن فی مربع فٹ

= $\frac{۱۶۰۰۰}{۱۴۴}$ پونڈ وزن فی مربع انچ

= ۱۱۱ $\frac{۱}{۹}$ پونڈ وزن فی مربع انچ

مشق ۲ — پانی کے اندر ۱۰ میٹر کی گہرائی پر کا دباؤ دریافت کرو جبکہ کرہ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ۷۶٫۰ سنتی میٹر ارتفاع کے مساوی ہے اور پارہ کی اضافی کثافت بلحاظ پانی کے ۱۳٫۶ ہے۔

یہاں Π = کرہ ہوائی کا دباؤ فی مربع سنتی میٹر

= ۷۶ سنتی میٹر اونچے ستون کا وزن

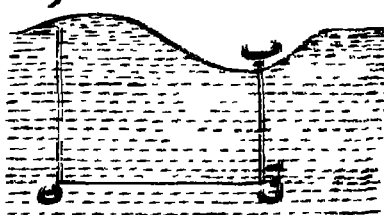
= پارہ کے ۷۶ مکعب سنتی میٹر کا وزن

= ۷۶ × ۱۳٫۶ گرام

∴ د = Π + و۱ × ۱۰۰۰ = (۷۶ × ۱۳٫۶ + ۱۰۰۰) گرام وزن فی مربع سنتی میٹر

اب چونکہ و۱ = پانی کے ایک مکعب سنتی میٹر کا وزن = ۱ گرام

∴ د = ۲۰۳۳٫۶ گرام فی مربع سنتی میٹر

۳۲ — حالت سکون میں ایک وزنی مائع کی سطح ہموار ہوتی ہے

مائع کے اندر کوئی دو نقطے ن اور ق لو جو ایک ہی افقی سطح پر واقع ہوں، انتصابی خط ن ا اور ق ب کھینچو جو مائع کی سطح سے ا اور ب پر ملیں۔

تب بموجب دفعہ ۲۷، ن پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ

اسلئے دفعہ ۳۱ کی رُو سے ﬤ + وِ × ن ا = ﬤ + وِ × ق ب

∴ ن ا = ق ب

اب چونکہ ن ق متوازی الافق ہے اسلئے ا ب لازماً افق کے متوازی ہوگا۔

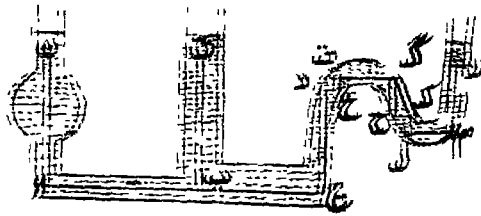
چونکہ ن اور ق کوئی دو نقطے ہیں جو ایک افقی خط پر واقع ہیں، اسلئے معلوم ہوا کہ اگر کوئی خط ا ب مائع کی سطح میں کھینچا جائے تو وہ بھی متوازی الافق ہوگا۔

اسلئے سطح مذکور متوازی الافق ہے۔

۳۳۔ اوپر کے ثبوتوں میں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ سیالوں کے مختلف حصوں کے وزن شاقولی سمت میں نیچے کی طرف عمل کرتے ہیں اور ان کے خطوطِ عمل متوازی ہوتے ہیں، علم سکون دفعہ ۹۶ میں بھی اس کا ذکر کیا گیا ہے کہ یہ مفروضہ صرف اُسی صورت میں صحیح ہو سکتا ہے جبکہ جسم زیر بحث زمین کے مقابلہ میں نہایت ہی چھوٹا ہو۔

اگر جسم کے حجم کو زمین کے مقابلہ میں نظر انداز نہ کرسکیں تو اس صورت میں یہ کہنا زیادہ صحیح ہوگا کہ جسم کے مختلف حصوں کے وزن متوازی سمتوں میں عمل نہیں کرتے بلکہ وہ زمین کے مرکز کی

سمت میں عمل کرتے ہیں۔
اسلئے دفعہ گذشتہ کا مسئلہ سمندر کی سطح کے لئے صحیح ہوگا خواہ سمندر بالکل حالت سکون میں ہو۔

۴۳۔ مسئلہ دفعہ ۴۲ اس صورت میں بھی ثابت ہو سکتا ہے جبکہ دو نقطوں کو ایک ایسے افقی خط سے ملانا ناممکن ہو جو بالتمام سیال کے اندر واقع ہو

کیونکہ نقطے ت اور ق انتصابی اور افقی خطوط ت ا، ا ب، ب ق کے ذریعہ وصل کردئے جاسکتے ہیں ملاحظہ ہو شکل،

ا ب ا پر کا دباؤ = ب پر کا دباؤ

لیکن ا پر کا دباؤ = ت پر کا دباؤ + و × ا ت

اور ب پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ + و × ب ق

لیکن ت اور ق ایک ہی افقی سطح میں واقع ہیں

یعنی ا ت = ب ق

اسلئے ت پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ

اسی طرح سے یہ مسئلہ کسی اور دو نقطوں کے لئے بھی صحیح ہوگا جو ایک ہی ہموار سطح پر واقع ہوں۔

پس اگر ا اور ت ایک ہی ہموار سطح پر واقع ہوں تو انکو

انتصابی اور افقی خطوں کے ذریعہ وصل کیا جا سکتا ہے ملاحظہ ہو شکل۔

پس نقطہ ل پر کا دباؤ

= ن پر کا دباؤ + و × ن ا - و × ج د - و × ع ف
+ و × گ ح + و × ک ل - و × م ا

= ن پر کا دباؤ

کیونکہ ج د + ع ف + م ل = ا ن + ح گ + ل ک

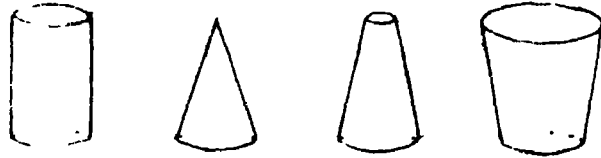
اسلئے اگر سیال ساکن ہو تو اس کی سطح کا ارتفاع ہر مقام پر وہی ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ چائے دانی اور اس کی ٹونٹی کے اندر چائے کی ہمواری (لیول) وہی ہوتی ہے۔

۳۵۔ مائعات کی اس خاصیت کو کہ اگر وہ حالت سکون میں ہوں تو ان کی سطح متوازی الافق ہوتی ہے اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ "پانی اپنی ہمواری خود ڈھونڈ لیتا ہے"۔
مائعات کی یہی خاصیت ہے جس کی وجہ سے ایک شہر کے مختلف مقامات کو پانی بہم پہنچایا جا سکتا ہے، کسی خاص مقام پر ایک حوض بنایا جاتا ہے جو اس شہر اور اس کی اطراف سے جنہیں پانی پہنچانا منظور ہوتا ہے زیادہ بلندی پر واقع ہوتا ہے، بڑے بڑے نلوں کو جو حوض سے نکلتے ہیں بڑی سڑکوں پر لگا دیا جاتا ہے، اور چھوٹی نلیاں جو بڑے نلوں سے نکلتی ہیں پانی کو مختلف سمتوں میں گھروں تک لے جاتی ہیں، اگر حوض اور نلیوں کے اندر پانی ساکن ہو تو

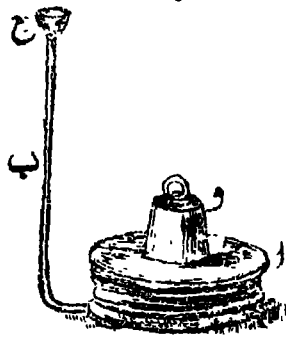
اس کی ہمواری حوض اور نلیوں میں ایک ہی ہو گی بشرطیکہ یہ ممکن ہو۔ ہم ان نلوں اور نلیوں کو اپنی ضرورت کے موافق جس بلندی یا پستی پر لے جانا چاہیں لے جا سکتے ہیں مگر ایسا کرنے میں اس بات کا ضرور خیال رکھنا چاہئے کہ نلوں اور نلیوں کے کسی حصہ کا ارتفاع حوض کے پانی کی سطح کے ارتفاع سے بڑھنے نہ پائے۔

۳۶۔ دفعہ گزشتہ سے ظاہر ہے کہ اگر کسی ظرف کے اندر پانی ہو تو اسکے قاعدہ کے کسی نقطہ پر کا دباؤ ظرف کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بلکہ اس نقطہ کی گہرائی پر منحصر ہوتا ہے۔

ذیل کی شکل میں چار برتن ہیں جن کی شکلیں مختلف ہیں مگر ارتفاع ایک ہی ہیں۔

فرض کرو کہ ان سب کو پانی سے بھر دیا گیا ہے۔

دفعہ ۲۷ کی رُو سے قاعدہ کے کسی نقطہ پر کا دباؤ اس کے مرکز پر کے دباؤ کے برابر ہے اور مرکز پر کا دباؤ سیال کی سطح کے انتصابی ارتفاع کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔

آبی دھونکنی اس اصول کی بنا پر بنائی جاتی ہے کہ مائعات کے اندر کسی نقطہ پر کا دباؤ اس کی گہرائی کے متناسب ہوتا ہے۔ ایک چمڑے کی دھونکنی ا کے ساتھ ایک نلی

ب ج لگا دی جاتی ہے اور دھونکنی کے اوپر کے تختہ پر ایک وزن و رکھدیا جاتا ہے، جب سرے ج میں سے نلی کے اندر پانی ڈالا جاتا ہے تو وزن و اوپر اُٹھ جاتا ہے؛ فرض کرو کہ دھونکنی کے اوپر کے تختہ کے اس حصہ کا رقبہ جو پانی سے مس کرتا ہے لا ہے۔

اگر نلی میں پانی کی چوٹی کا ارتفاع دھونکنی سے لا ہو تو رقبہ لا کی ہر اکائی پر دباؤ لا × و عمل کرتا ہے [دفعہ ۲۸] پس کل قوت جو دھونکنی کی اوپر کی سطح پر عمل کرتی ہے لا لا و ہے؛ اگر یہ قوت وزن و سے زیادہ ہو تو وزن و اوپر اُٹھ جائے گا اور اس طرح سے نلی کے اندر پانی کا ارتفاع اتنا کم ہو جائے گا کہ مقدار لا لا و اور وزن و باہم مساوی اور متوازن ہو جائینگے۔

اس تجربہ کو بعض اوقات سکونِ سیّالات کا مسئلہ غریبہ کہتے ہیں

۳۷ ـ دو متجانس الاجزا، وزنی مائعات باہم مل نہیں سکتے، ان میں سے ایک مائع دوسرے پر ساکن ہے، نچلے مائع کی سی گہرائی پر دباؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نچلے اور اوپر کے مائعات کے اوزان فی اکائی حجم بالترتیب و اور وَ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نچلے مائع کے اندر کوئی نقطہ ن ہے [شکل دفعہ ۳۸] اس نقطہ میں سے ایک انتصابی خط کھینچو جو مائعات کی سطح مشترک سے ا پر اور اوپر کے مائع کے اوپر کی سطح سے اَ پر ملے۔

حسب دفعہ ۲۸ ایک پتلے اسطوانہ پر غور کرو جسکا محور ن ا ا ہے اور جسکی عمودی تراش عہ ہے، اگر ن پر کا دباؤ فی اکائی رقبہ د ہو تو

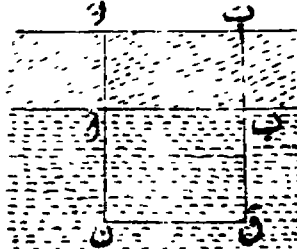
د × عہ = و × عہ × ن ا + عہ × ا پر کا دباؤ

= و × عہ × ن ا + عہ × وَ × ا اَ

∴ د = و × ن ا + وَ × ا اَ = و × ف + وَ × فَ

جہاں فَ اوپر کے مائع کا ارتفاع ہے اور ف نقطہ مفروضہ کی گہرائی ہے مائعات کی سطح مشترک سے۔

۳۸ - دو متجانس الاجزا، وزنی مائعات باہم مل نہیں سکتے، ثابت کرو کہ ان کی سطح مشترک متوازی الافق ہے۔

فرض کرو کہ نچلے مائع میں ن اور ق دو نقطے ہیں اور انکے ملانے والا خط ن ق متوازی الافق ہے۔

نیز فرض کرو کہ وٖ اور وٕ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں بیان ہوئے، انتصابی خط ن ا اَ، ق ب بَ کھینچو جو مشترک سطح سے ا اور ب پر اور اوپر کے مائع کی سطح سے اَ اور بَ پر ملیں۔

چونکہ ن ق افق کے متوازی ہے

اسلئے ن پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ [دفعہ ۲۷]

∴ وٖ × ن ا + وٕ × ا اَ = وٖ × ق ب + وٕ × ب بَ ... [دفعہ ۳۲]

∴ وٖ(ن اَ - ا اَ) + وٕ × ا اَ = وٖ(ق بَ - ب بَ) + وٕ × ب بَ

...... (۱)

لیکن ن ق افق کے متوازی ہے اور اَ بَ بموجب دفعہ ۳۲ متوازی الافق ہے

اسلئے ن اَ = ق بَ

اسلئے (۱) ہو جائے گی (وٕ - وٖ) × ا اَ = (وٕ - وٖ) × ب بَ

∴ ا اَ = ب بَ

اس لئے ا ب، اَ بَ کے متوازی ہے اور اس لئے متوازی الافق ہے۔

اس سے معلوم ہوا کہ سطح مشترک پر کے کسی دو نقطوں کو ملانے والا خط افق کے متوازی ہوتا ہے یعنی سطح مشترک افق کے متوازی ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۴

۱۔ پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۰۰۰ اونس ہے، پانی کی سطح سے

نیچے ایک میل کی گہرائی پر دباؤ فی مربع انچ دریافت کرو۔
۲۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۵ پونڈ وزن فی مربع انچ ہو تو پانی کے اندر وہ گہرائی دریافت کرو جس پر دباؤ ۱۰۰ پونڈ وزن فی مربع انچ ہوگا
۳۔ ایک سیال کی کثافتِ اضافی ۱،۵۶ ہے، اور سیال کے اندر کسی نقطہ پر کا دباؤ ۱۲۰۹۰ اونس وزن کے برابر ہے، اگر طول کی اکائی ایک فٹ ہو تو اس نقطہ کی گہرائی دریافت کرو۔
۴۔ ایک مکان کے پہلے فرش کی ہمواری پر ایک پانی کی نلی کے اندر دباؤ ۳۴ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے اور تیسرے فرش کی ہمواری پر دباؤ نلی کے اندر ۱۸ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے، تیسرے فرش کی اونچائی پہلے فرش سے دریافت کرو۔
۵۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۴ پونڈ وزن فی مربع انچ ہو اور ہوا کی کثافتِ اضافی ۰۰۱۲۵، ہو تو ہوا کے ایک ستون کا ارتفاع دریافت کرو جس کی کثافت یکساں ہو اور جس کا دباؤ وہی ہو جو اصلی کرہ ہوائی کا ہے۔
۶۔ ایک سطح مستوی پر کرہ ہوائی کا دباؤ اتنا ہے جتنا کہ پانی کے ۳۴ فٹ اونچے ستون کا جو اس سطح پر قائم ہو۔ اگر ایک کھڑکی کا آئینہ ۱۶ انچ اونچا اور ایک فٹ چوڑا ہو تو کرہ ہوائی اس کی ایک جانب جو قوت لگاتا ہے اس کی مقدار دریافت کرو۔
۷۔ ایک کنوئیں کی تہ پر کا دباؤ اس دباؤ کا چار گنا ہے جو پانی کی سطح سے ۲ فٹ کی گہرائی پر ہو، اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ۳۰ فٹ اونچے پانی کے دباؤ کے مساوی ہو تو کنوئیں کی گہرائی دریافت کرو۔

۸- اگر آبی بار پیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو تو پانی کی سطح کے نیچے ایک ایسے نقطہ کی گہرائی دریافت کرو جس پر کا دباؤ ۱۰ فٹ کی گہرائی پر کے دباؤ کا دو چند ہو-

۹- ایک جھیل کی سطح کے نیچے ایک نقطہ کی گہرائی ۵ فٹ ہے اور اس پر کا دباؤ ایک ایسے نقطہ پر کے دباؤ کا نصف ہے جسکی گہرائی ۴۴ فٹ ہے کرہ ہوائی کا دباؤ پونڈوں میں فی مربع انچ دریافت کرو-

۱۰- اگر سمندر کے پانی کی کثافت اضافی ۱٫۰۲۶ ہو اور تازہ پانی کا وزن ½ ۶۲ پونڈ فی مکعب فٹ ہو تو سمندر کی سطح کے نیچے ۱۰ فیدم کی گہرائی پر جو دباؤ ہے اس کو فی مربع گز ٹنون میں دریافت کرو-

۱۱- اگر پارہ کی کثافت اضافی ۱۳٫۵۹۶ ہو تو معلوم کرو کہ پانی کے اندر ۵۰۰ میٹر کی گہرائی پر جتنا دباؤ ہے اتنا ہی دباؤ پارہ کے اندر کس گہرائی پر ہو گا؟

۱۲- پارہ (کثافت اضافی = ۱۳٫۵۹۶) کی کس گہرائی پر دباؤ فی مربع سنتی میٹر ایک کلو گرام وزن کے مساوی ہو گا-

۱۳- ایک سیمابی بار پیما کا ارتفاع ۷۵۰ ملی میٹر ہے اور پارہ کے ایک مکعب سنتی میٹر کا وزن ۱۳٫۶ گرام ہے، ایک مربع کھلمندن جسکا ہر ضلع ایک دسی میٹر ہے ایک قابلہ کو بند کئے ہوئے ہے جس کی ہوا خارج کردی گئی ہے، گرامون کے وزن میں اس قوت کی تقریبی قیمت معلوم کرو جو کھلمندن کے مرکز پر لگائی جائے اور اس کو کھولنے کیلئے

عین کافی ہو۔

۱۴۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۵ پونڈ وزن فی مربع انچ کے برابر ہو اور پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ½ ۶۲ پونڈ ہو تو پانی کی سطح کے نیچے ذیل کی گہرائیوں پر دباؤ فی مربع انچ دریافت کرو۔

(۱) ۱۰ فٹ کی گہرائی پر (۲) ایک میل کی گہرائی پر۔

۱۵۔ ایک برتن کا پیندا متوازی الافق ہے اور اس کے اندر ۱۰ انچ کی اونچائی تک پارہ ڈالا گیا ہے، اگر پارہ کے اوپر ۲۴ انچ کی اونچائی تک پانی ڈالا جائے تو پیندے کے کسی نقطہ پر کا دباؤ فی مربع انچ پونڈوں کے وزن میں دریافت کرو۔ (پارہ کی اضافی کثافت ۱۳٫۶ ہے)

۱۶۔ ایک ظرف کا کچھ حصہ پانی سے بھر دیا گیا ہے اور پانی کے اوپر تیل ڈالا گیا ہے، تیل کی اونچائی چھ انچ ہے۔ اگر تیل کی اضافی کثافت ۰٫۹۲ ہو اور پانی کے ایک مکعب انچ کا وزن ۲۵۲ گرین ہو تو ایک ایسے نقطہ پر کا دباؤ فی مربع انچ معلوم کرو جسکی گہرائی تیل کی اوپر کی سطح سے ۸٫۵ انچ ہے۔

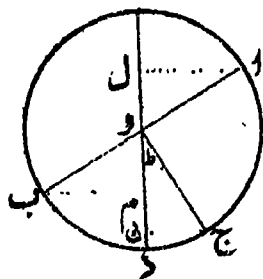
۱۷۔ ایک ظرف کے اندر کچھ پانی ہے اور کچھ پارہ، پانی کی گہرائی ۱ فٹ ہے، اگر پارہ کی اضافی کثافت ۱۳٫۵۶۸ ہو اور پانی کے ایک مکعب فٹ کی کمیت ۱۰۰۰ اونس ہو تو ایک ایسے نقطہ پر کا دباؤ فی مربع انچ پونڈون کے وزن میں دریافت کرو جو سطح مشترک سے ۲ انچ کی گہرائی پر واقع ہو۔

۱۸۔ ایک لا نلی کی ایک شاخ کی عمودی تراش ۱ مربع انچ ہے

اور دوسری شاخ کی ۱ء مربع انچ، نلی میں پارہ بھرا گیا ہے جسکی
کثافت اضافی ۵۹۶ء۱۳ ہے، بتاؤ کہ بڑی نلی میں کتنا پانی ڈالا جائے
کہ چھوٹی نلی میں پارہ ایک انچ اور اوپر چڑھ جائے۔

۱۹- دائرہ نما شکل کی ایک چھوٹی یکساں نلی انتصابی سطح میں واقع
ہے، دو سیالوں کی مساوی مقداروں سے آدھی نلی کو بھرا گیا ہے
اگر سیالوں کی کثافتیں ک$_1$ اور ک$_2$ ہوں تو ثابت کرو کہ سیالوں کی
سطح مشترک میں سے گذرنے والا نصف قطر انتصابی خط سے زاویہ

$$\text{مس}^{-1} \frac{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}$$ بناتا ہے۔

فرض کرو کہ مائع کا سب سے اونچا نقطہ ا ہے اور سب سے نچلا
ب، اس طرح سے اب مرکز و میں سے گذرے گا۔ اس لئے مائعات
کا مشترک نقطہ ج ایسا ہے کہ ∠ ا و ج = ∠ ب و ج = ۹۰°
اگر نلی کے انتصابی قطر کا سب سے نچلا نقطہ د ہو اور اس قطر پر
عمود ا ل، ب م، اور ج ن نکالے جائیں تو دفعہ ۲۸ کی رو سے
د پر کا دباؤ = ک$_1$ × و × د م [کیونکہ یہ دباؤ سیال ب د کی وجہ
سے ہے]
نیز اگر سیال د ج ا کا دباؤ نقطہ د پر محسوب کیا جائے تو یہ
= ک$_1$ و × د ن + ج پر کا دباؤ
= ک$_1$ و × د ن + ک$_2$ و × ن ل
∴ ک$_1$ × د م = ک$_1$ × د ن + ک$_2$ × ن ل
یعنی ک$_1$ × ن م = ک$_2$ × ن ل

یعنی ک$_1$ [جم ط - جم(۹۰° - ط)] = ک$_2$ [جم ط + جم(۹۰° - ط)]

یعنی ک$_1$ (جم ط - جب ط) = ک$_2$ (جم ط + جب ط)

یا جم ط پر تقسیم کرنے سے

ک$_1$ (۱ - مس ط) = ک$_2$ (۱ + مس ط)

یا مس ط (ک$_1$ + ک$_2$) = ک$_1$ - ک$_2$

اس لئے مس ط = (ک$_1$ - ک$_2$) / (ک$_1$ + ک$_2$)

۲۰ - دائرہ کی شکل کی ایک پتلی، یکساں انتصابی نلی میں، مائعات ڈالے گئے ہیں جن کی کثافتیں بالترتیب ک$_1$ اور ک$_2$ ہیں، دائرہ کی جس قوس کے اندر اول الذکر مائع ہے اس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے اور دوسرے مائع کی قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ ع بنتا ہے، ثابت کرو کہ مائعات کی سطح مشترک میں سے گذرنیوالا نصف قطر خط انتصابی سے زاویہ مس$^{-1}$ (ک$_1$ - ک$_2$ + ک$_2$ جم ع) / (ک$_1$ + ک$_2$ جب ع) بناتا ہے۔

۲۱ - دائرہ کی شکل کی ایک پتلی یکساں نلی ہے، اس کے نچلے نصف دائرہ کا آدھا حصہ ایک مائع سے بھر دیا گیا ہے جس کی کثافت ۲ک ہے اور باقی کے آدھے حصے میں دو مائعات ڈالے گئے ہیں جو ایک دوسرے سے نہیں ملتے اور جنکی کثافتیں ۳ک اور ک ہیں، ثابت کرو کہ ان آخری دو مائعات میں سے نچلے کا حجم دوسرے کے حجم کا دو چند ہے۔

۲۲- دائرہ کی شکل کی ایک پتلی یکسان نلی چار ایسے سیالون کی مساوی حجموں سے آدھی بھری گئی ہے جو آپس میں نہیں ملتے اور جن کی اضافی کثافتوں کی باہمی نسبتین ۱ : ۴ : ۸ : ۷ ہیں، اگر نلی انتصابی سطح میں واقع ہو تو ثابت کرو کہ آزاد سطحوں کو ملانے والا قطر انتصابی خط کے ساتھ زاویہ $مس^{-1}$ ۲ بناتا ہے-

۲۳- ن مائعات جنکی کثافتیں اوپر کے مائع سے شروع ہوکر بالترتیب ک، ۲ک، ۳ک، ... ن ک ہیں ایک دوسرے کے اوپر ترتیب دئے گئے ہیں- اگر ہر ایک مائع کی موٹائی م ہو تو سب سے نچلے مائع کے سب سے نیچے کے نقطے پر کا دباؤ معلوم کرو-

۲۴- ایک غیر متجانس الاجزا سیال کے اندر گہرائی ی پر کثافت

$$\frac{ک ی}{ا}$$

ہے، ثابت کرو کہ اس گہرائی پر کا دباؤ

$$\Pi + \frac{ج ک ی^{2}}{۲ ا}$$ ہے-

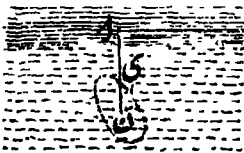
۳۹- کُل دباؤ- تعریف-

اگر کسی جسم کی سطح پانی کے اندر ڈوبی ہوئی ہو اور اس کے رقبہ کے ہر ایک چھوٹے جزو پر کا دباؤ معلوم کیا جائے جو اس جزو پر عموداً عمل کرتا ہے تو اِن دباؤں کا مجموعہ سطح پر کا کل دباؤ کہلاتا ہے- اگر یہ سطح مستوی ہو تو صاف ظاہر ہے کہ اس قسم کا کُل دباؤ اُن سب دباؤں کے حاصل (یعنی مجموعی دباؤ) کے

مساوی ہے جو اس پر عمل کرتے ہیں - ذیل کے مسئلہ سے
ہم اس مجموعی دباؤ کو معلوم کر سکیں گے -

مسئلہ - اگر ایک مستوی سطح پانی کے اندر ڈبوئی جائے تو
اس پر کا کل دباؤ یا مجموعی دباؤ و × س × ی کے مساوی
ہوگا جہاں س سطح مستوی کا رقبہ ہے اور ی سیال کی
سطح سے سطح مستوی کے مرکز ثقل کی گہرائی ہے، اسمیں
ہوا کے دباؤ کو نظر انداز کیا گیا ہے -

کسی مستوی سطح پر غور کرو جو پانی میں ڈبوئی گئی ہے، یہ
سطح متوازی الافق ہو سکتی ہے یا افق کے ساتھ کوئی زاویہ
بنا سکتی ہے -

سطح مستوی کے رقبہ کے ایک
چھوٹے جزو عہ پر غور کرو
جو ن پر واقع ہے -
نقطہ ن سے سیال کی
سطح پر عمود ن ا کھینچو، فرض کرو کہ ن ا کا طول ی ہے
اس لئے اس چھوٹے جزو پر کا دباؤ = و عہ ی .... (دفعہ ۲۸)
اسی طرح سے اگر عہ، عہ، ...... سطح مستوی کے رقبہ کے اور
چھوٹے اجزا ہوں اور ان کی گہرائیاں بالترتیب ی، ی...
ہوں تو ان پر کے دباؤ بالترتیب و عہ ی، و عہ ی، ....
ہوں گے -
اسلئے حاصل مجموعی دباؤ = و [عہ ی + عہ ی + ...] (علم سکون دفعہ ۵۵)

لیکن اگر رقبۂ مفروضہ کے مرکزِ ثقل کی گہرائی $\overline{\text{ی}}$ ہو تو بموجب دفعہ ۱۱۱ علم سکون

$$\overline{\text{ی}} = \frac{\text{ع}_1 \text{ی}_1 + \text{ع}_2 \text{ی}_2 + \cdots\cdots}{\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$\therefore \text{ع}_1 \text{ی}_1 + \text{ع}_2 \text{ی}_2 + \cdots\cdots = \overline{\text{ی}}(\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \cdots\cdots) = \overline{\text{ی}}\,\text{س}$$

اس لئے حاصل مجموعی دباؤ $= \text{و}_1 \overline{\text{ی}}\,\text{س} =$ سطح کا رقبہ × مرکز ثقل پر کا دباؤ

یعنی حاصل مجموعی دباؤ مائع کے ایک ایسے اسطوانہ کے وزن کے مساوی ہے جس کا قاعدہ مفروضہ مستوی سطح کے رقبہ کے برابر ہے اور جس کا ارتفاع سطح مذکورہ بالا کے مرکز ثقل کی گہرائی کے برابر ہے۔

۴۰۔ اگر ہوا کے دباؤ کو نظر انداز نہ کیا جائے تو $\overline{\text{ی}}$ مؤثر سطح کے نیچے مرکز ثقل کی گہرائی کو تعبیر کریگا۔(مؤثر سطح وہ ہے جس کا ارتفاع مائع کی سطح کے اوپر ف ہو جہاں ف اسی سیال کے بار پیما کی اونچائی ہے) اگر یہ معلوم ہو کہ کرہ ہوائی کا دباؤ رقبہ کی ایک اکائی پر Π ہے۔ تو سطح پر کے مجموعی دباؤ کا وہ حصہ جو کرہ ہوائی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے Π س ہو گا۔

۴۱۔ اگر سطح زیر بحث منحنی ہو تو کل دباؤ اس حالت میں بھی دفعہ ۳۹ کے ضابطہ سے معلوم ہو سکے گا اور اس کا ثبوت اسی دفعہ کے موافق ہو گا لیکن ایک منحنی سطح کی

صورت میں کل دباؤ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا۔ اور اس لئے اس کے معلوم کرنے سے کوئی خاص فائدہ حاصل نہیں ہوتا۔ یاد رہے کہ منحنی سطح کی صورت میں کل دباؤ اور حاصل مجموعی دباؤ دونوں ایک ہی چیز نہیں ہیں۔ حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرنیکے طریقہ پر ہم اگلے باب میں بحث کرینگے۔

۴۴۔ مشق ا۔ ایک مربع تختی جس کا کنارہ ۸ انچ ہے سمندر کے پانی میں غرق کی گئی ہے۔ اس کے اوپر کا کنارہ متوازی الافق ہے اور پانی کی سطح سے ۱۲ انچ کی گہرائی پر ہے، اگر تختی افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے تو اس کی سطح پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو (فرض کرو کہ سمندر کے پانی کے ایک مکعب فٹ کی کمیت ۶۴ پونڈ ہے)

تختی کے مرکزِ ثقل کی گہرائی $= 12 + 4 \sin 45^\circ = (12 + 2\sqrt{2})$ انچ

$= \dfrac{6+\sqrt{2}}{6}$ فٹ

نیز تختی کا رقبہ $= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ مربع فٹ

اس لئے مجموعی دباؤ $= \dfrac{4}{9} \times \dfrac{6+\sqrt{2}}{6} \times 64$ پونڈ وزن

$= 35.149$ پونڈ وزن تقریباً

مشق ۲۔ ایک مجوف مخروط افقی میز پر قاعدہ کے بل پڑا ہے، قاعدہ کا رقبہ ۱۰۰ مربع انچ ہے۔ اور مخروط کا ارتفاع ۸٫۶۴ انچ ہے۔ اگر اس مخروط کو پانی سے بھر دیا جائے تو مخروط کے قاعدے پر کا دباؤ معلوم کرو اور نیز اِس دباؤ کی نسبت اُس پانی کے وزن کے ساتھ معلوم کرو جو مخروط کے اندر ہے۔

مجموعی دباؤ = ۱۰۰ × ۶۴٫۸ مکعب انچ پانی کا وزن

= $\frac{۸۶۴}{۱۷۲۸}$ × ۱۰۰۰ اونس وزن = ۵۰۰ اونس وزن

= ۳۱٫۲۵ پونڈ وزن

چونکہ مخروط کا حجم قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کی ایک تہائی کے برابر ہوتا ہے اس لئے اندر کے پانی کا وزن

= $\frac{۱}{۳}$ × ۱۰۰ × ۶۴٫۸ مکعب انچ پانی کا وزن

= $\frac{۱}{۳}$ × ۳۱٫۲۵ پونڈ وزن

اس لئے مخروط کے قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ = مخروط کے پانی کے وزن کا تین گنا۔

یہ جواب بادی النظر میں ناممکن معلوم ہوتا ہے لیکن اس کی صحت اس سے واضح ہوتی ہے کہ سمت رأس میں قاعدہ کا جو مجموعی دباؤ سیال پر ہے وہ دو چیزوں کا موازنہ کرتا ہے اولاً مائع کے وزن کا اور ثانیاً اس مجموعی دباؤ کے شاقولی جزو ترکیبی کا جو سطح منحنی اندر کے مائع پر ڈالتی ہے۔ اگلے باب سے یہ ثابت ہو سکے گا کہ یہ جزو ترکیبی سیال کے وزن کا دو چند ہے۔

مشق ۴۔ ایک سیال کے اکائی حجم کا وزن و ہے، اس پر ایک دوسرا سیال جو پہلے سیال سے نہیں ملتا ساکن ہے، اس سیال کے اکائی حجم کا وزن وَ ہے اور اس کا ارتفاع ا ہے۔ ایک مربع جس کا ایک ضلع ب (> ا) دونو سیالوں میں

انتصاباً ڈبویا گیا ہے' اگر مربع کے اوپر کا کنارہ اوپر کے سیّال کی بالاترین سطح میں واقع ہو تو مربع پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

اس مربع پر سیالوں کا دباؤ دو سیالوں کے مجموعی دباؤں کے برابر خیال کیا جا سکتا ہے۔ ایک تو ایسا سیال جس کا ذاتی وزن وَ ہے اور جو سب مربع کی سطح کو مس کرتا ہے۔ اور دوسرا ایسا سیّال جس کا ذاتی وزن و ـ وَ ہے اور جو مربع کے صرف نچلے حصہ کو مس کرتا ہے ان دو مائعات کی وجہ سے جو مجموعی دباؤ مربع پر عمل کرتے ہیں ان کا حاصل جمع' مطلوبہ مجموعی دباؤ کے مساوی ہوگا۔

پہلے مائع کی وجہ سے جو مجموعی دباؤ پیدا ہوتا ہے وہ بموجب دفعہ ۱۴

$$= وَ \times ب^2 \times \frac{ب}{2}$$

اور جو دباؤ دوسرے مائع کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے

$$= (و - وَ) \times ب(ب - ا) \times \frac{ب - ا}{2}$$

∴ مطلوبہ مجموعی دباؤ

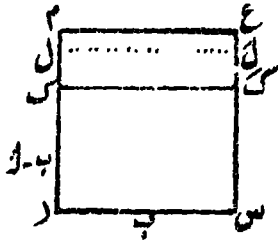
$$= وَ \times \frac{ب^3}{2} + (و - وَ) \times \frac{ب}{2}(ب - ا)^2$$

$$= \frac{1}{2} و ب(ب - ا)^2 + \frac{1}{2} وَ ب[ب^2 - (ب - ا)^2]$$

$$= \frac{1}{2} و ب(ب - ا)^2 + \frac{1}{2} وَ ا ب(2ب - ا)$$

متبادل ثبوت ۔ یہ مجموعی دباؤ اس طرح سے بھی محسوب کیا جا سکتا ہے ۔

مربع کے اُس حصہ پر کا دباؤ جو اوپر کے مائع میں ہے

$= \frac{۱}{۲} \times$ ا ب $\times$ وَ

نچلے حصہ ک ر س کَ پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ مائع م ک کَ ع کو جس کا وزن وَ ہے ہٹا کر اس کی جگہ مائع ل ک کَ لَ رکھا گیا ہے جس کا ذاتی وزن و ہے، اس آخر الذکر مائع سے ہمواری ک کَ پر وہی دباؤ پیدا ہوتا ہے جو اصلی سیال سے ہوتا ہے ۔

اس لئے ک ل $\times$ و $=$ ک م $\times$ وَ $=$ ا $\times$ وَ

$\therefore$ ک ر س کَ پر کا مجموعی دباؤ

$=$ اس کا رقبہ $\times$ و $\times \left(\text{ک ل} + \frac{\text{ب۔ا}}{۲}\right)$ (دفعہ ۳۹)

$=$ ب (ب ۔ ا) $\times$ و $\times \left[\frac{\text{اوَ}}{\text{و}} + \frac{\text{ب۔ا}}{۲}\right]$

$=$ ب (ب ۔ ا) $\times \left[\text{اوَ} + \frac{۱}{۲} (\text{ب ۔ ا}) \text{و}\right]$

$\therefore$ مطلوبہ حاصل مجموعی دباؤ

= ½ وَ × ب ا۲ + ب (ب - ا) [ا وَ + ½ (ب - ا) و]

= ½ ب (ب - ا)۲ و + ا ب وَ [ا/۲ + ب - ا]

= ½ ب (ب - ا)۲ و + ½ ا ب (۲ ب - ا) وَ بموجب سابق

امثلہ نمبری ۵

۱- ایک برتن میں چار فٹ کی گہرائی تک پانی بھرا ہوا ہے اور اس کے پیندے میں ایک مکعب جس کا ہر ایک کنارہ ۲ فٹ ہے اپنے ایک رخ کے بل پڑا ہے - مکعب کے کسی انتصابی رُخ پر پانی کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۲- ایک حوض سطح سمندر سے ۴۰۰ فٹ اونچا ہے، اس میں سے ایک نل کے ذریعہ ایک مکان میں پانی لایا جاتا ہے۔ اگر نل کی ٹونٹی سطح سمندر سے ۱۵۰ فٹ اونچی ہو اور اس کی عمودی تراش کا رقبہ ½ ۱ مربع انچ ہو تو ٹونٹی پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۳- ایک مکعب پانی کے اندر معلق ہے، اس کے اوپر کا رخ متوازی الافق ہے اور پانی کی سطح سے ۷۵ سنتی میتر کی گہرائی پر ہے - اگر مکعب کا ایک کنارہ ۳۰ سنتی میتر ہو تو مکعب کے ہر ایک رُخ پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو -

۴- ایک جہاز کے پیندے میں آبی خط کے نیچے ۲۰ فٹ کی گہرائی پر ایک سوراخ ہو گیا ہے جس کا رقبہ ۲ انچ مربع ہے۔ اگر

سمندر کے پانی کا وزن ۶۴ پونڈ فی مکعب فٹ ہو تو دریافت کرو کہ ایک لکڑی کے ٹکڑے سے سوراخ کو بند رکھنے کے لئے کتنی قوت درکار ہو گی۔

۵۔ ایک انتصابی دیوار پانی میں تعمیر کی گئی ہے اور اس کے اوپر کا کنارہ پانی کی سطح میں ہے، دیوار کی اونچائی ۱۲ فٹ ہے اور چوڑائی ۸ فٹ۔ اگر آبی بار پیما کا ارتفاع ۳۳ فٹ ہو تو دیوار کے کسی ایک پہلو پر پانی کا مجموعی دباؤ دریافت کرو۔

۶۔ ایک ظرف کو جس کے پیندے کا رقبہ ۱۵ سنتی میتر مربع ہے اور جس کی اونچائی ۱۵ سنتی میتر ہے پانی سے بھرا گیا ہے، اس ظرف کی ایک گردن ہے جس کا طول ۵ء۷ سنتی میتر ہے اور جس کی عمودی تراش ۱۰ مربع سنتی میتر ہے، ظرف کے پیندے پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۷۔ اگر آبی بار پیما کی اونچائی ۱۰۳۳ سنتی میتر ہو تو ایک ایسی گول تختی پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو جس کی گہرائی پانی کے اندر ۵۰ میتر ہے اور جس کا نصف قطر ۷ سنتی میتر ہے۔

۸۔ ایک تالاب کا بند ۲۰۰ گز لمبا ہے اور اس کا جو رخ پانی سے مس کرتا ہے وہ شکل میں مستطیل ہے اور افق کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر پانی کی گہرائی ۳۰ فٹ ہو تو بند پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

یہ بھی معلوم کرو کہ تالاب کے اندر جو پانی ہے اسکی سطح کی وسعت کا کوئی اثر مجموعی دباؤ پر پڑے گا یا نہیں۔

۹- مخروط ناقص کی شکل کا ایک ظرف پانی سے بھرا گیا ہے، اس کی چوٹی کا قطر ۱ انچ ہے اور پیندے کا ۸ انچ، اور اس کی اونچائی ۱۲ انچ ہے۔ قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ اور قاعدہ کے مرکز پر کا دباؤ فی مربع انچ پونڈوں کے وزن میں معلوم کرو۔

۱۰- ایک مربع کو ایک مائع کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اسکا ایک کنارہ مائع کی سطح میں ہے، مربع پر ایک افقی خط کھینچنے کا عمل دریافت کرو جو مربع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں۔

۱۱- کعب کی شکل کا ایک برتن ایک تہائی پارہ سے بھرا گیا ہے جس کی کثافتِ اضافی ۱۳،۶ ہے اور باقی دو تہائی پانی سے۔ اگر کعب کا ہر ایک ضلع ایک دسی میٹر ہو تو اس کے ایک رخ پر کا مجموعی دباؤ کلو گراموں کے وزن میں معلوم کرو۔

۱۲- ایک برتن کی اونچائی ایک فٹ ہے اور اس کے ایک پہلو کا طول ۱۰ انچ ہے، اس میں ۸ انچ تک پارہ بھرا ہوا ہے اور باقی پانی۔ پارہ کی کثافت اضافی ۱۳،۵۹۶ ہے اور کرہ ہوائی کا دباؤ فی مربع انچ ۱۵ پونڈ وزن کے برابر ہے، برتن کے ایک رخ پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۱۳- ایک مستطیل شکل کے برتن کا ایک رخ ۲ فٹ اونچا ہے اور ایک فٹ چوڑا، اس کو آدھا پارہ سے اور آدھا پانی سے بھرا گیا ہے، اگر پارہ کی کثافتِ اضافی ۱۳،۵ ہو تو اس رخ پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک حوض میں پانی بھرا ہوا ہے، اس کے ایک رخ پر پانی کے اندر مختلف گہرائیوں پر مساوی چھوٹے رقبے ا اور ب ہیں۔ ا پر کا مجموعی دباؤ ب پر کے مجموعی دباؤ کا چار گنا ہے، لیکن جب حوض میں سے اتنا پانی نکال لیا جائے کہ پانی کی سطح ایک فٹ نیچی ہو جائے تو ا پر کا مجموعی دباؤ ب پر کے مجموعی دباؤ کا ۹ گنا ہو جاتا ہے۔ پانی کی سطح کے نیچے ا اور ب کی سابق گہرائیاں دریافت کرو۔

۱۵۔ مکعب کی شکل کے ایک صندوق کا ایک کنارہ ایک فٹ ہے اس میں ایک نلی لگی ہوئی ہے جس کے دوسرے سرے کا انتصابی ارتفاع صندوق کے ڈھکنے سے ۲ فٹ ہے، صندوق میں نلی کے اوپر کے سرے تک پانی بھرا ہوا ہے۔ ڈھکنے پر کا مجموعی دباؤ سمت رأس میں اور قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ سمت شاقولی میں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ان کا فرق اُس پانی کے وزن کے برابر ہے جو صندوق کے اندر ہے۔

اس امر کی تشریح کرو کہ قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ صندوق کے کے پانی کے وزن سے کیوں زیادہ ہے۔

۱۶۔ ایک مصنوعی جھیل $\frac{1}{4}$ میل لمبی اور ۱۰۰ گز چوڑی ہے، اس کی تہ ایک سطح مائل ہے جس کی گہرائی عرض کے ایک کنارے پر صفر ہے اور بتدریج بڑھتے بڑھتے عرض کے دوسرے کنارے پر ۸۸ فٹ ہو جاتی ہے، عرض کے اِس کنارے پر ایک پکی دیوار بنائی گئی ہے، اگر پانی کے ایک مکعب گز کا وزن

$\frac{۳}{۴}$ ٹن ہو تو ثابت کرو کہ کل دیوار پر کا مجموعی دباؤ $۲۲۲۶۶\frac{۲}{۳}$ ٹن ہوگا اور کل پانی کا وزن ۴۸۴۰۰۰ ٹن ہوگا۔

۱۷۔ ایک حوض کی دیواریں انتصابی ہیں اور اس کا قاعدہ ایک افقی منتظم مسدس ہے جس کا ہر ضلع $\sqrt{۳}$ فٹ ہے، حوض کو پانی سے بھر دیا گیا ہے، اگر حوض کی ہر ایک دیوار پر کا مجموعی دباؤ قاعدہ پر کے مجموعی دباؤ کے مساوی ہو تو حوض کی گہرائی دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کا ہر ایک کنارہ ا ہے، اس مجسم کو پانی میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اسکی ایک سطح متوازی الافق ہے اور اس سطح کے مقابل کا نقطۂ رأس نیچے کی طرف ہے۔ اگر افقی سطح کی گہرائی گ ہو تو ہر ایک رخ پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو اور اس کی مدد سے ذو اربعۃ السطوح پر کا حاصل مجموعی دباؤ دریافت کرو۔

۱۹۔ مستطیل شکل کا ایک انتصابی دروازہ ہے جس کی چوڑائی ۵۰ فٹ ہے، اس کی ایک جانب نمکین پانی (کثافت اضافی ۱٫۰۲۶) ۲۵ فٹ کی گہرائی تک بھرا ہوا ہے اور دوسری جانب تازہ پانی ہے، اگر دروازہ کے دونوں طرف کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں تو تازہ پانی کی گہرائی دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک مجوف مخروط کو جس کا قاعدہ نیچے کی طرف ہے اور جس کا محور انتصابی ہے دو مائعات کے مساوی حجموں سے بھرا گیا ہے۔ ان مائعات کی کثافتوں کی باہمی نسبت ۳ : ۱ ہے۔

ثابت کرو کہ مخروط کے قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ اُس دباؤ کا (۳ - ∛۴) گنا ہے جو سارے مخروط کو ہلکے سیّال سے بھرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۱- ایک مستطیل کے اضلاع ا اور ب ہیں، ضلع ا متوازی الافق ہے اور اس کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے ج ہے، اگر مستطیل کی سطح انتصابی خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو مستطیل پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۲۲- ایک مستدیر اسطوانہ کا ارتفاع ف اور نصف قطر ا ہے، اگر اسطوانہ کے وسطی نقطہ کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے ج ہو اور اس کا محور خط انتصابی سے زاویہ طہ بنائے تو اس کے دونوں مستوی سروں پر کے مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۲۳- ایک پانی سے بھرا ہوا مخروط اپنے مائل ارتفاع کے بل ایک افقی میز پر پڑا ہے، اگر مخروط کا زاویۂ راس ۲ عہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کے قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ پانی کے وزن کا ۳ جب عہ گنا ہے۔

۲۴- ایک مجوف، بے وزن مخروط کا زاویۂ راس ۲ عہ ہے، اس کو پانی سے بھرا گیا ہے، اگر مخروط کو محیطِ قاعدہ کے کسی نقطہ سے بلا تکلف لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ قاعدہ پر کے مجموعی دباؤ کو مخروط کے پانی کے وزن کے ساتھ نسبت

۱۲ جب² عہ : جم عہ √(۱ + ۱۵ جب² عہ) ہے۔

۲۵- ایک مجوف، بے وزن کرہ قاعدہ کے محیط پر کے ایک نقطہ سے بلا تکلف لٹکایا گیا ہے، اگر اس کو پانی سے بھرا جائے تو

ثابت کرو کہ سطح مستوی پر کے مجموعی دباؤ کو پانی کے وزن سے نسبت ۱۲ : $\sqrt{۷۳}$ ہے -

۲۶ - ایک متوازی الاضلاع کو پانی کے اندر اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع پانی کی سطح میں ہے، اس کی سطح پر افقی خط کھینچنے سے اس کو ایسے ن حصوں میں تقسیم کرو جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں، ثابت کرو کہ ان خطوں کی گہرائیوں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو طبعی اعداد کے جذروں کو آپس میں ہے -

۲۷ - ایک مربع شکل کا پترا ا ب ج د پانی میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا کنارہ ا ب پانی کی سطح میں ہے، نقطہ ا میں سے ایک خط مستقیم کھینچو جو پترے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں -

۲۸ - ایک مربع ایک سیّال میں ڈبویا گیا ہے، اگر مربع کا ایک کنارہ پانی کی سطح میں ہو اور مربع کی سطح انتصابی ہو تو مربع پر قطر کے متوازی ایک خط کھینچنے سے اس کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں -

۲۹ - نصف دائرہ کی شکل کا ایک پترا پانی میں ڈبویا گیا ہے، اگر اس کا قطر پانی کی سطح میں ہو اور اس کی سطح انتصابی ہو تو اس کو ایسے ن قطاعوں میں تقسیم کرو جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں -

۳۰ - ایک مثلث پانی میں پورا ڈوبا ہوا ہے اور اس کا نقطۂ راس ج پانی کی سطح میں ہے، نقطہ ا میں سے ایک خط

کھینچنے کا طریقہ معلوم کرو جو مثلث مذکور کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہوں۔

۳۱- ایک سیّال کی کثافت ک۱ ہے، اس کے اوپر ایک اور ہلکا سیّال پڑا ہے جس کی کثافت ک۲ ہے اور جس کی گہرائی ا انچ ہے، ایک مربع جس کا ہر ایک ضلع ب ہے ان سیّالوں میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کے اوپر کا ضلع اوپر کے سیّال کی بالائی سطح میں ہے، اگر مربع کے اُن دو حصوں پر کے مجموعی دباؤ جو اِن دو سیّالوں کو مس کرتے ہیں باہم برابر ہوں تو ثابت کرو کہ

ک۲ ا۲ (۳ا - ۲ب) = ک۱ (ب - ا)۲

۳۲- ایک مثلث اب ج پانی کے اندر انتصاباً غرق کیا گیا ہے، نقطہ ج پانی کی سطح میں ہے اور اضلاع اج، ب ج پانی کی سطح کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں، ثابت کرو کہ اگر ج میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو وہ مثلث کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے گا جن پر کے مجموعی دباؤں کی نسبت بَ۳ + ۳اَبَ۲ : اَ۳ + ۳اَ۲بَ ہوگی جہاں اَ، بَ، جَ مثلث کے اضلاع ہیں۔

۳۳- ایک مکعب صندوق کو جس کے پہلو انتصابی ہیں ن مختلف سیّالوں کی مساوی مقداروں سے بھرا گیا ہے، یہ سیّال آپس میں نہیں ملتے اور ان کی کثافتیں اوپر سے شروع ہوکر بالترتیب ک، ۲ک، ... ن ک ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ پر کا مجموعی دباؤ

ایک رخ کے اس حصہ پر کے مجموعی دباؤ کا (ن + ۱) گنا ہے جو حصہ سب سے نچلے سیّال کو مس کرتا ہے۔

۳۴۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک گلاس آدھا ایک سیّال سے بھرا گیا ہے اور باقی آدھا دوسرے سیّال سے، پہلے سیّال کی کثافت ک ہے اور دوسرے کی کَ، یہ سیّال ایک دوسرے سے نہیں ملتے، اگر گلاس کا ارتفاع ف ہو اور اس کے قاعدے کا نصف قطر رَ تو ثابت کرو کہ گلاس کے قاعدہ پر کے مجموعی دباؤ کو سطح منحنی پر کے کل دباؤ کے ساتھ نسبت

۲ ر (ک + کَ) : ف (ک + ۳ کَ) ہے۔

۳۵۔ ایک بند مجوف مخروط کا نقطۂ راس اوپر کی طرف ہے اور اس کا محور انتصابی ہے، مخروط کو پانی سے بھرا گیا ہے، اس کی منحنی سطح کو ایک افقی سطح کے ذریعہ ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو جن پر کے کل دباؤ باہم مساوی ہوں۔

مخروط کو ایسے ہی دو حصوں میں تقسیم کرو جبکہ نقطۂ راس نیچے کی جانب ہو۔

۳۶۔ ایک اسطوانہ ن مختلف سیّالوں کے مساوی حجموں سے بھرا گیا ہے، یہ سیّال آپس میں نہیں ملتے اور اوپر سے نیچے کی طرف ان سیّالوں کی کثافتیں بالترتیب ک، ۲ک، ۳ک ۔۔۔۔ ن ک ہیں، ثابت کرو کہ منحنی سطح کے مختلف حصوں پر کے کل دباؤ باہم یہ نسبت رکھتے ہیں ۱^۲ : ۲^۲ : ۔۔۔۔ : ن^۲

۴۳ - ایک مستوی رقبہ پر کے دباؤ کا مرکز۔ اگر ایک مستوی رقبہ کو ایک سیّال کے اندر ڈبویا جائے تو اس کے کسی نقطہ کا دباؤ مستوی رقبہ پر عمود وار ہوگا اور اس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا۔

ظاہر ہے کہ سطح مذکورہ کی ایک جانب کے سب نقطوں پر کے دباؤ متوازی قوتوں کا ایک نظام بناتے ہیں اور ان کی مقدارین بھی معلوم ہیں۔

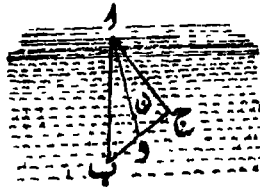
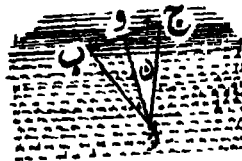
علم سکون دفعہ ۵۳ کی رو سے تمام متوازی قوتیں ایک قوتِ واحد میں ترکیب دی جاسکتی ہیں اور یہ قوت مستوی رقبہ کے ایک خاص نقطے پر عمل کرتی ہے۔

اس قوتِ واحد کو حاصل سیّالی دباؤ کہتے ہیں اور مستوی رقبہ کی صورت میں یہ وہی چیز ہے جو کہ کُل دباؤ ہے، اور رقبہ کا وہ نقطہ جس پر یہ عمل کرتی ہے اس رقبہ پر کے دباؤ کا مرکز (مرکزِ دباؤ) کہلاتا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں دباؤ کے مرکز کا مقام معلوم کرنا ایک دقت طلب امر ہے، ہم باب ۹ میں اس پر مفصل بحث کرینگے، یہان صرف ایک یا دو آسان صورتوں میں دباؤ کے مرکز کا مقام بتادیا جائے گا۔

(۱) ایک مستطیل ا ب ج د پانی میں ڈبویا گیا ہے، اس کا ایک ضلع ا ب پانی کی سطح میں ہے، اگر ا ب اور

ج ر کے وسطی نقطے بالترتیب ل اور م ہوں تو دباؤ کا مرکز ن پر ہوگا جہاں ل ن = $\frac{2}{3}$ ل م

(۲) ایک مثلث ا ب ج پانی کے اندر ڈبویا گیا ہے، اس کا نقطۂ راس ا پانی کی سطح کے اندر ہے اور قاعدہ ب ج متوازی الافق ہے، اگر ب ج کا وسطی نقطہ و ہو تو دباؤ کا مرکز ن، ا و پر ایک ایسا نقطہ ہوگا کہ ا ن = $\frac{3}{4}$ ا و

(۳) ایک مثلث ا ب ج پانی کے اندر ڈبویا گیا ہے، اسکا قاعدہ ب ج پانی کی سطح میں ہے، اگر قاعدہ کا وسطی نقطہ و ہو تو دباؤ کا مرکز ن، و ا کا نقطۂ تنصیف ہوگا۔

مشق ۱۔ ایک حوض کے ایک پہلو میں مستطیل شکل کا ایک سوراخ ا ب ج د ہے، اس سوراخ کے نیچے کا ضلع ج د متوازی الافق ہے، ا ب اور ا د کے طول بالترتیب ۱ فٹ اور ۱۲ فٹ ہیں، اگر اس سوراخ کو ایک ایسے انتصابی دروازے سے بند کیا جائے جو ا ب کے گرد گھوم سکتا ہو اور حوض میں پانی کی سطح ا ب پر ہو تو بتاؤ کہ دروازے کو بند رکھنے کے لئے ج د کے وسطی نقطہ پر کتنی قوت لگانے کی ضرورت ہو گی۔

اگر قوت مطلوبہ ق ہو تو ا ب کے گرد اس کا جو معیارِ اثر ہوگا وہ ا ب کے گرد پانی کے دباؤ کے معیارِ اثر کے مساوی ہوگا۔

دفعہ ۳۹ کی رو سے پانی کا مجموعی دباؤ

$$= ۱ \times ۱۲ \times ۶ \times \frac{۱۰۰۰}{۱۲}$$ پونڈ وزن = ۴۵۰۰ پونڈ وزن

نیز صورت اول کی رو سے یہ اُس نقطہ پر عمل کرتا ہے جس کا فاصلہ ا ب سے

$$= \frac{۲}{۳}$$ ا د = ۸ فٹ

اس لئے ا ب کے گرد معیارِ اثر محسوب کرنے سے

ق × ۱۲ = ۴۵۰۰ × ۸

∴ ق = ۳۰۰۰ پونڈ وزن

امثلہ نمبری ۶

۱۔ پانی سے بھرے ہوئے ایک مکعب صندوق کا ڈھکنا ایک

مربع شکل کی تختی ا ب ج د ہے جس کا وزن صندوق کے پانی کے وزن کا دو تہائی ہے، ڈھکنا ا ب کے گرد گھوم سکتا ہے اور صندوق کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ڈھکنے کی سطح افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے، اگر ا ب متوازی الافق ہو اور ج د سے اوپر ہو تو ثابت کرو کہ ڈھکنا کھلنے کے عین قریب

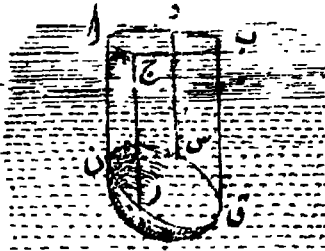
۲۔ ایک مکعب شکل کے صندوق کا ایک انتصابی پہلو اپنے اوپر کے کنارے کے گرد گھوم سکتا ہے، اس پہلو میں اس کے اوپر کے کنارے پر ایک سلاخ لگی ہے جو پہلو پر عمود وار ہے اور جس کی لمبائی مکعب کے ایک کنارے کے برابر ہے، اگر سلاخ کا وزن ۵ پونڈ ہو اور اس پانی کا وزن جس سے صندوق بھر جائے ۲۴ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ صندوق کے اندر کتنا پانی ڈالا جائے کہ اس کا یہ پہلو عین کھلنا شروع ہو جائے۔

۳۔ ایک متوازی الافق نلی کے اندر پانی ہے، اس کو ایک ایسے مربع ڈھکنے سے بند کیا گیا ہے جو افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے، اور جس کے دو کنارے متوازی الافق ہیں، ڈھکنے کا ہر ایک کنارہ ایک فٹ ہے اور وہ اپنے نیچے کے کنارے کے گرد گھوم سکتا ہے۔ اگر ڈھکنا اس وقت کھلنے کے عین قریب ہو جبکہ اس کے اوپر کا کنارہ پانی کی سطح میں ہو تو ڈھکنے کا وزن معلوم کرو۔

باب چہارم

کسی سطح پر کا حاصل مجموعی دباؤ

۴۴۔ اگر کسی منحنی سطح کا ایک حصہ ایک وزنی مائع کے اندر ڈبویا جائے جیسا اگلی دفعہ کی شکل میں ہے تو اس سطح پر مائع کے دباؤ کا مجموعی اثر معلوم کرنا یا بالفاظ دیگر سیّال کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرنا ایک دقّت طلب امر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مختلف نقطوں پر کے دباؤ مختلف سمتوں اور مختلف سطحوں میں عمل کرتے ہیں۔ لیکن اگر ہم سطح کے ہر ایک جزو پر کے دباؤ کو انتصابی اور افقی اجزائے ترکیبی میں تحلیل کریں تو ہم ایسی قوتیں معلوم کر سکتے ہیں جو حاصل مجموعی دباؤ کے متساوی ہوں۔ سب سے پہلے ہم اس سطح پر مائع کی انتصابی قوت کی پوری مقدار معلوم کرینگے۔ اس قوت کو **حاصل انتصابی دباؤ** کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سطح مفروضہ کے مختلف نقاط پر جو دباؤ عمل کرتے ہیں ان کے انتصابی اجزائے ترکیبی کا حاصل، اس حاصل دباؤ کے برابر ہے کیونکہ یہ انتصابی

اجزائے ترکیبی متوازی قوتیں ہیں اور اس لئے وہ ایک انتصابی قوتِ واحد میں ترکیب دی جا سکتی ہیں۔
اگلی دفعہ میں یہ بیان ہوگا کہ کس طرح سے یہ انتصابی حاصل دباؤ معلوم ہو سکتا ہے۔
۴۵۔ ایک سطح وزنی مائع کے اندر غرق کی گئی ہے اس پر کا حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو۔
ایک سطح اُ کے اندر غرق کی گئی ہے، اس کے ایک حصہ ن ر ق س پہ غور کرو۔
فرض کرو کہ اس کے احاطہ کرنے والے کنارے کے ہر ایک نقطہ میں سے ایک ایک انتصابی خط کھینچا گیا ہے اور یہ انتصابی خط پانی کی سطح سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جن سے منحنی ا ج ب د بنتا ہے۔

اب مائع کے اس حصہ کے توازن پر غور کرو جو ان انتصابی خطوط، سطح ن ر ق س، اور مستوی سطح ا ج ب د کے اندر گھرا ہوا ہے۔
دفعہ ۲۸ کے موافق سطح ن س ق ر کے ہر ایک جزو کا

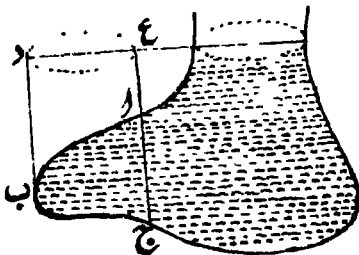
مجموعی دباؤ راسی سمت میں مائع کے اُس پتلے اسطوانہ کے
وزن کا موازنہ کرتا ہے جو اس جزو کے اوپر قائم ہے، پس
اس قسم کے جتنے جزوی مجموعی دباؤ سمت راس میں عمل کرتے
ہیں ان کا حاصل یعنی سطح کا حاصل راسی دباؤ سیال پر اِن چھوٹے اسطوانوں
کے اوزان کے حاصل کے متساوی اور متقابل ہوگا۔ اور
ان دونوں حاصلوں کا خطِ عمل بھی ایک ہی ہوگا۔ لیکن مائع
کے اسطوانوں کے وزنوں کا حاصل، مائع ن رق س دا ج ب
کا وزن ہے اور اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتا ہے۔
نیز سطح کا جو مجموعی دباؤ مائع پر ہے وہ اُس مجموعی دباؤ
کے متساوی و متقابل ہے جو مائع کا سطح مذکور پر ہے۔
اس لئے معلوم ہوا کہ اگر کوئی سطح وزنی مائع میں غرق کی
جائے تو اس پر کا حاصل انتصابی دباؤ اُس
مائع کے وزن کے مساوی ہوتا ہے جو اس پر قائم ہو
اور اس قائم علیہ مائع کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتا ہے۔
۴۶ — اگر سطح کو نیچے کی طرف دبانے کی بجائے مائع اُس کو اوپر
کی طرف دبائے جیسا کہ ذیل کی شکل میں ہے تو بھی وہی
عمل کرنا چاہئے جو دفعہ گزشتہ میں کیا گیا ہے۔
سطح ن رق س کے کسی نقطہ پر کا دباؤ مائع کی سطح سے
نیچے اس نقطہ کی محض گہرائی پر موقوف ہے، اس لئے اس
سطح کے کسی نقطہ پر کا دباؤ دونوں صورتوں میں خواہ مائع
برتن کے اندر ہو یا باہر مقدار میں ایک ہی ہوگا (بشرطیکہ مائع

کے باہر ہونے کی صورت میں اس کی آزاد سطح اب فرض کی جائے) مگر مائع کے باہر ہونے کی صورت میں یہ نیچے کی طرف عمل کرے گا اور اندر ہونے کی صورت میں اوپر کی طرف، ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں یہ اوپر کی طرف عمل کرتا ہے۔

پس سطح ن ر ق س پر کا حاصل انتصابی دباؤ، مائع ن ق ا ب کے وزن کے برابر ہے۔

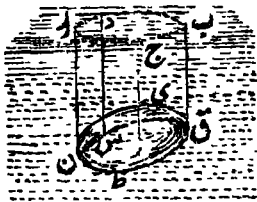
لہٰذا سطح مذکور کے حصۂ مفروضہ پر کا حاصل انتصابی دباؤ اُس مائع کے وزن کے برابر ہے جو اس حصہ پر اصلی مائع کی سطح تک قائم ہو سکے اور یہ دباؤ مائع کے مرکز ثقل میں سے راسی سمت میں عمل کرتا ہے۔

۷۴۔ اگر سطح اس طرح کی ہو جیسے ذیل کی شکل میں دکھائی گئی ہے تو حصہ ا ب پر کا حاصل انتصابی دباؤ سمت راس میں عمل کرتا ہے اور اُس مائع کے وزن کے برابر ہے جو ب ا ع د میں بھرا جا سکتا ہے۔

ب ج پر کا حاصل انتصابی دباؤ نیچے کی طرف ہے اور اُس مائع کے وزن کے برابر ہے جو ج ب د ع میں بھرا جا سکتا ہے اور سطح ا ب ج پر کا حاصل

انتصابی دباؤ ان کے فرق کے برابر ہے اور اس لئے مائع ج ب ا کے وزن کے مساوی ہے اور نیچے کی طرف عمل کرتا ہے۔

۴۸ ۔ دفعہ ۴۷ میں اگر مائع متجانس الاجزا نہ ہو تو جو مائع ن ق ا ب کے اندر بھرا جائے گا اس کی کثافت کسی نقطہ پر وہی فرض کی جائے گی جو اس نقطہ کی گہرائی پر برتن کے اندر اصلی مائع کی ہے، لیکن اس کتاب میں بہت کم مثالیں ایسی ہیں جن میں کہ مائع متجانس الاجزا نہ ہو۔

۴۹ ۔ ایک جسم کاملاً یا جزءً پانی میں ڈبویا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس پر کا حاصل مجموعی دباؤ ہٹائے ہوئے پانی کے وزن کے برابر ہوتا ہے [متبادل ثبوت کے لئے دیکھو نوٹ دفعہ ۵۶]

ایک جسم ن ط ق ی پورا پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ایک انتصابی خط جسم مذکور کی سطح کے گرداگرد اس کو منحنی ن ر ق س پر مس کرتا ہے اور مائع کی سطح کو منحنی ا ج ب د پر ملتا ہے۔

سطح (ط، ن ر ق س) پر کا حاصل انتصابی دباؤ اس مائع کے وزن کے برابر ہے جو ن ط ق ب ا میں بھرا جا سکتا ہے

اور اس کے مرکز ثقل میں سے سمت رأس میں عمل کرتا ہے۔
اور سطح (ی ن ر ف س) پر کا حاصل انتصابی دباؤ
اُس مائع کے وزن کے برابر ہے جو ن ی ق ب ا میں
بھرا جا سکتا ہے اور اس کے مرکز ثقل میں سے شاقولی سمت
میں عمل کرتا ہے۔
یہ دو مجموعی دباؤ ہیں جن کا حاصل سارے جسم پر کے حاصل
انتصابی دباؤ کے مساوی ہے اور اس لئے یہ حاصل انتصابی
دباؤ اُس مائع کے وزن کے مساوی ہے جو حجم ن ط ق ی
کو بھر سکتا ہے اور ن ط ق ی کے مرکز ثقل میں سے
اوپر کی طرف عمل کرتا ہے۔
لہٰذا معلوم ہوا کہ اگر ایک جسم پورا پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہو
تو اس پر کا حاصل انتصابی دباؤ ہٹائے ہوئے مائع کے
وزن کے مساوی ہوتا ہے اور ہٹائے ہوئے مائع کے مرکز
ثقل میں سے سمتِ رأس میں عمل کرتا ہے۔ [دفعہ ۵۲ سے
یہ معلوم ہوگا کہ جسم پر کا حاصل افقی دباؤ صفر ہوتا ہے]
ہٹائے ہوئے مائع کے مرکز ثقل کو اکثر مرکز سباحت یا
اچھال کا مرکز کہتے ہیں اور حاصل انتصابی دباؤ کو
اچھال کی قوت کہتے ہیں۔
یہ نہایت ضروری مسئلہ جو ابھی بیان ہوا اصول ارشمیدس
کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے، ارشمیدس ایک یونانی
حکیم تھا جو سنۂ عیسوی سے قریباً ۲۵۰ سال قبل گزرا ہے

۵۰ - یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مسئلہ مذکور اُس صورت میں بھی برقرار رہتا ہے کہ جسم کو جزءً پانی کے اندر غرق کیا جائے - اگر جسم کی شکل قدرے غیر منتظم واقع ہو جیسے ذیل کی شکل میں تو حاصل انتصابی دباؤ مائعات ذیل کے وزنوں کے مجموعۂ جبریہ کے مساوی ہوگا (۱) مائع ا ن ق ب کا وزن جو اوپر کی طرف عمل کرتا ہے (۲) مائعات س د ب ق اور د ج ا ن کے وزن جو دونوں نیچے کی طرف عمل کرتے ہیں اور (۳) مائعات د س م اور ج ل د کے وزن جو اوپر کی طرف عمل کرتے ہیں - یعنی حاصل انتصابی دباؤ اُس مائع کے وزن کے برابر ہے جو ل ن ق س م میں بھرا جا سکتا ہے اور اس کے مرکز ثقل میں سے سمت راس میں عمل کرتا ہے -

۵۱ - اگر مائع متجانس الاجزا نہ ہو تو دفعہ ۴۸ کی طرح یہ فرض کیا جائے گا کہ جسم سے گھری ہوئی جگہ میں ایک ایسا مائع بھر دیا گیا ہے جس کی کثافت جسم کے اندر کسی خاص گہرائی پر وہی ہے جو جسم کے باہر کے مائع کی اُسی گہرائی پر ہے -

امثلہ نمبری ۷

۱- ایک برتن مخروط ناقص کی شکل کا ہے - اُس کا پیندا اور چوٹی

دو مدور تختیوں سے بند کئے گئے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب ۸ انچ اور ۹ انچ ہیں، اگر برتن کو پانی سے بھر دیا جائے تو اُس کو بڑی تختی اور چھوٹی تختی کے بل رکھنے سے جو مجموعی دباؤ نیچے کی تختی پر ہونگے اُن کا باہم مقابلہ کرو۔
اس امر کی تشریح کرو کہ کیوں ایک حالت میں یہ مجموعی دباؤ سیال کے وزن سے زیادہ ہوگا اور دوسری حالت میں کم۔
۲۔ شراب کا ایک گلاس مخروطی شکل کا ہے، گلاس کو پانی سے بھر کر میز پر اوندھا رکھا گیا ہے، ثابت کرو کہ پانی کا جو مجموعی دباؤ گلاس پر ہے وہ میز پر کے مجموعی دباؤ کا دو تہائی ہے۔
۳۔ ایک مخروط کا ارتفاع ف ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے، اس مخروط کو پانی سے بھرا گیا ہے اور اس پانی کو ایک ایسے اسطوانہ میں ڈالا گیا ہے جس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے، اگر مخروط اور اسطوانہ دونوں کے محور انتصابی ہوں تو ان کے قاعدوں پر جو مجموعی دباؤ دونوں صورتوں میں عمل کرتے ہیں اُن کا مقابلہ کرو۔
۴۔ ایک مجوف اسطوانہ کو پانی سے بھرا گیا ہے اور اس کے دونوں سروں کو بند کرکے اُس کو اس طرح سے رکھا گیا ہے کہ اس کا محور افق کے متوازی ہے، اسطوانہ کی منحنی سطح کے نچلے نصف پر کا انتصابی مجموعی دباؤ معلوم کرو۔
۵۔ ایک نصف کروی پیالہ کو پانی سے بھر کر مستوی قاعدہ کے بل ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کی سطح پر کا

حاصل انتصابی دباؤ مینر پر کے مجموعی دباؤ کا ایک تہائی ہے۔
۶۔ ایک قائم مستدیر مخروط کے مستوی قاعدہ کو ایک پتلی تختی سے بند کردیا گیا ہے، اگر اُس کو پانی سے بھر کر اس طرح رکھا جائے کہ اس کا محور متوازی الافق ہو تو (۱) سطح منحنی کے اوپر کے نصف پر کا اور (۲) نیچے کے نصف پر کا حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔
۷۔ ایک ڈول مخروطِ ناقص کی شکل کا ہے، اس کی چوٹی اور پیندے کے نصف قطر بالترتیب ۶ انچ اور ۴ انچ ہیں، اور اسکی اونچائی ایک فٹ ہے، ڈول کو پانی سے بھرا گیا ہے، اگر پانی کا وزن فی مکعب فٹ ۱۰۰۰ اونس ہو تو اس کی منحنی سطح پر کا حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔
۸۔ ایک اسطوانے کے ایک سرے پر ایک مخروط قائم کرنے سے ایک مجوف برتن تیار کیا گیا ہے اور اس کو پانی سے بھر کر بند کردیا گیا ہے، مخروط کا محور اسطوانہ کے محور کا تین گنا ہے، ثابت کرو کہ دونوں صورتوں میں جبکہ برتن کا محور انتصابی ہو مخروط کی سطح پر کا حاصل مجموعی دباؤ برابر ہوگا۔
۹۔ ایک دُہری کیت دو مخروطوں کے راسوں کو جوڑنے سے بنائی گئی ہے، مخروطون کے محور ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں اور مشترک نقطۂ راس پر کا ایک سوراخ دونوں مخروطوں کو ملاتا ہے، کیف کو ایک افقی سطح پر اسطرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، اگر کیف کو پانی سے بھرا جائے تو ثابت کرو کہ

نچلے مخروط کی منحنی سطح پر کا حاصل انتصابی دباؤ پانی کے وزن کا $2\frac{1}{4}$ گنا ہے۔

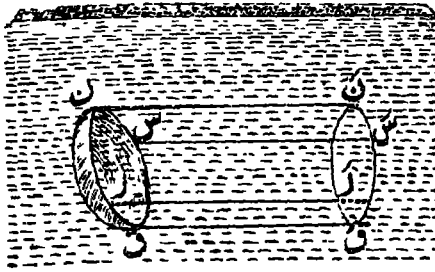
۱۰۔ دُہرے مخروط کی شکل کا ایک برتن دو مساوی مخروطوں کے راسوں کو جوڑنے سے بنایا گیا ہے، مخروطوں کے محور ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں اور مشترک نقطۂ راس پر ایک چھوٹا سوراخ اِن دونوں مخروطوں کو ملاتا ہے، برتن کو ایک افقی میز پر اس کی ایک مستوی سطح کے بل رکھ کر پانی سے بھرا گیا ہے، برتن پر کا حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اگر برتن کے اوپر کے حصہ کا محور نچلے حصہ کے محور سے دوچند ہو تو یہ حاصل انتصابی دباؤ صفر ہوگا۔

۱۱۔ مخروطی شکل کے ایک وزنی گلاس کو ایک چکنی افقی سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اور اس کے اندر اس کی چوٹی پر کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے آہستہ آہستہ پانی ڈالا گیا ہے، پیالہ کا وزن اُس پانی کے وزن کا $\frac{5}{8}$ ہے جو اس کو بھرنے کے لئے عین کافی ہو، ثابت کرو کہ پیالہ اُس وقت سطحِ مستوی سے عین اوپر اٹھنے کو ہوگا جبکہ پانی کی گہرائی پیالہ کے ارتفاع کے نصف کے برابر ہو جائے۔

۱۲۔ مخروطی شکل کا ایک خول ایک افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اور اس کے اندر راس پر کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے کوئی مائع ڈالا گیا ہے،

اگر مخروط میز پر سے اُس وقت اٹھنا شروع کرے جبکہ اس کے اندر کے مائع کا وزن مخروط کے وزن کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ مخروط کے وزن کو اُس مائع کے وزن کے ساتھ جو مخروط کو بھرنے کے لئے عین کافی ہوتا ہے نسبت ۹ - ۳۳/۴ : ۴ ہو گی۔

۱۳- دو مساوی مجوّف مخروطوں کے رأسوں کو باہم جوڑنے سے ایک دُہری کیف تیار کی گئی ہے، مشترک رأس پر کا ایک سوراخ دونوں مخروطوں کو ملاتا ہے، کیف ایک مستوی سطح پر قائم ہے اور اس کا مشترک محور افق پر عمود ہے۔ کیف کے اندر اتنا مائع ڈالا گیا ہے کہ اس کی سطح اوپر کے مخروط کے محور کی تنصیف کرتی ہے، اگر اِس وقت مائع نچلے مخروط اور میز کے درمیان میں سے باہر نکلنے کے عین قریب ہو تو ثابت کرو کہ کسی ایک مخروط کے وزن کو اس مائع کے وزن کے ساتھ جو ایک مخروط کے اندر آسکتا ہے نسبت ۲۷ : ۱۶ ہو گی۔

۵۴- ایک سطح پانی کے اندر غرق کی گئی ہے، اس پر کا حاصل افقی دباؤ کسی خاص سمت میں دریافت کرو۔
سطح مذکور کے محیط کے ہر ایک نقطہ میں سے سمت مفروضہ میں افقی خطوط ن نَ، ق قَ، ر رَ، س سَ.. وغیرہ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط ایک ایسی مستوی سطح کو جو سمت مفروضہ پر عمود دار ہو منحنی نَ رَ قَ سَ .... پر ملتے ہیں،

رقبہ کا ایک نہایت ہی
چھوٹا جزو ن رق س
لو اور دفعہ ۲۷ کے موافق
اس پر ایک پتلا اسطوانہ
بناؤ جس کا دوسرا سرا
مستوی سطح نَ رَقَ سَ پر واقع ہو اور جس کے تکوینی
خط ن نَ کے متوازی ہوں۔

جو قوتیں اس اسطوانہ پر عمل کرتی ہیں اُن کو ن نَ کے
متوازی تحلیل کرنے سے ظاہر ہے کہ چھوٹے جزو ن رق س
پر کا افقی مجموعی دباؤ = اس کے متناظر چھوٹے
جزو نَ رَقَ سَ پر کا افقی مجموعی دباؤ [کیونکہ باقی جو
قوتیں اس پتلے اسطوانے پر عمل کرتی ہیں یعنی اُس کا وزن
اور اس کے گرد کے سیّال کا دباؤ وہ سب کی سب سمت ن نَ
سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں]

اب چونکہ اوپر کا بیان رقبہ کے تمام اجزا کے لئے درست
ہے بشرطیکہ اجزا کافی طور پر چھوٹے ہوں اس لئے معلوم
ہوا کہ ن رق س کا حاصل افقی دباؤ سمت ن نَ میں
نَ رَقَ سَ پر کے حاصل افقی دباؤ کے مساوی اور
متقابل ہے اور نیز ان دباؤں کا خطِ عمل بھی ایک ہی ہے۔

اب نَ رَقَ سَ کا حاصل افقی دباؤ دفعہ ۳۹ میں معلوم
کیا گیا ہے کیونکہ یہ نَ رَقَ سَ پر کا کل دباؤ ہے،

نیز ہم جانتے ہیں کہ اس کا نقطۂ عمل نَ رَقَ سَ پر کے دباؤ کا مرکز ہے۔

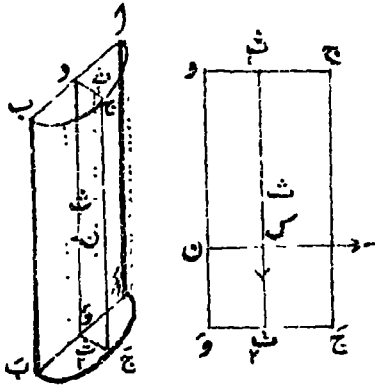
لہٰذا کسی سطح پر کا حاصل افقی دباؤ کسی خاص سمت میں معلوم کرنے کے لئے ہمیں اُس سطح کا ظِل ایک ایسی انتصابی سطح مستوی پر بنانا چاہئے جو سمت مفروضہ پر عمود وار ہو۔ تب سطح مذکور پر کا حاصل افقی دباؤ اس ظِل پر کے کل دباؤ کے مساوی ہوگا اور اس ظِل کے دباؤ کے مرکز میں سے عمل کرے گا۔

۵۳- ایک سطح پانی میں غرق کی گئی ہے، اس پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

اب ہم کسی سطح پر کا حاصل مجموعی دباؤ ذیل کے طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۴۵ کی مدد سے حاصل انتصابی دباؤ کی مقدار اور اس کا خطِ عمل دونوں معلوم ہو سکتے ہیں، نیز دفعہ ۵۲ کی مدد سے حاصل افقی دباؤ اور ان کے خطِ عمل دو ایسی افقی سمتوں میں معلوم ہو سکتے ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں، اگر اِن تینوں قوتوں کو ایک قوت واحد (حاصل) میں ترکیب دینا ممکن ہو (جیسا کہ متشاکل اجسام کی صورت میں بالعموم ممکن ہوگا) تو یہ حاصل، اُس مسئلہ کی مدد سے جو قوتوں کا متوازی السطوح کہلاتا ہے معلوم ہو سکے گا۔

۵۴- مشق ایک مجوف اسطوانہ کا ایک مستوی سرا ایک پتلی تختی سے بند کیا گیا ہے اور اُس کو پانی سے بھر کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اسکا

محور انتصابی ہے، اگر ایک انتصابی سطح جو اسطوانہ کے محور میں سے گذرتی ہو اسطوانہ کے دو حصے کرے تو اسطوانے کے ایک نصف پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرو اور اس دباؤ کا خطِ عمل بھی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع ف ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ل ہے، نیز فرض کرو کہ تقسیم کرنے والی مستوی سطح اسطوانے کو سطح ا ب بَ اَ میں کاٹتی ہے۔ ا ب کے وسطی نقطہ و میں سے نصف قطر و ج کھینچو جو اوپر کے مستوی نصف

دائرہ کی تنصیف کرے، و ج پر ایک نقطہ ثا ایسا لو کہ

$$و ث_1 = \frac{4ل}{3\pi}$$ [علم سکون دفعہ ۱۱۸]

تب ثا نصف دائرہ کا مرکز ثقل ہوگا۔

اب نصف اسطوانہ کے قاعدہ پر نقطہ ثا سے عمود ثا ثب کھینچو جو قاعدہ سے ثب پر ملے اور ثا ثب کی تنصیف ث پر کرد تب نقطہ ث اس مائع کے نصف اسطوانے کا مرکز ثقل ہوگا۔

دفعہ ۴۵ کی رو سے انتصابی سمت میں عمل کرنے والا مجموعی

دباؤ نقطہ ث میں سے عمل کرتا ہے اور = مائع کے نصف اسطوانے کا وزن

= ½ π ر² × ف × و

جہاں و مائع کے اکائی حجم کا وزن ہے۔
اور دفعہ ۵۲ کی رُو سے منحنی سطح پر کا افقی مجموعی دباؤ = مستطیل ا ب بَ اَ پر کا مجموعی دباؤ
اور یہ دفعہ ۴۳ (۱) کی رُو سے دباؤ کے مرکز ن پر عمل کرتا ہے جہاں د ن = ⅔ د دَ اور اسکی مقدار = و × رقبہ سطح ا ب بَ اَ × اس کے مرکز ثقل کی گہرائی

= و × ۲ ر ف × ف/۲ = و ف² ر

اگر مرکز ث میں سے گزرنے والا انتسابی خط نقطہ ن میں سے گذرنے والے افقی خط سے نقطہ ک پر ملے [ملاحظہ ہو دائیں طرف کی شکل] تو حاصل مجموعی دباؤ ک میں سے گزرے گا، اگر اس حاصل کی مقدار ح ہو اور اس کا زاویۂ میلان افق سے طہ ہو تو

ح جم طہ = و ف² ر

ح جب طہ = ½ π ر² ف و

∴ مس طہ = π ر / ۲ ف

اور ح = و ف ر √(ف² + ¼ π² ر²)

اس طرح سے حاصل مجموعی دباؤ کی مقدار اور اس کا خطِ عمل دونوں

معلوم ہوگئے۔

امثلہ نمبری ۸

۱۔ ایک ٹھوس نصف کرے کو جس کا نصف قطر ا ہے پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کے مرکز کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے گ ہے اور اس کی مستوی سطح انتصابی ہے، اس کی منحنی سطح پر کا افقی مجموعی دباؤ معلوم کرو اور نیز اس پر کا کل مجموعی دباؤ دریافت کرو۔

۲۔ ایک ٹھوس، قائم، مستدیر مخروط پانی کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے اور اس کے محور کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے گ ہے، محور میں سے گذرنے والی ایک انتصابی سطح مخروط کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے، مخروط کے ایک نصف پر کا افقی مجموعی دباؤ دریافت کرو۔

۳۔ ایک مجوف، قائم، مستدیر مخروط کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے، مخروط کو مائع سے بھرا گیا ہے، اگر محور میں سے گذرنے والی ایک سطح مخروط کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے تو سطح منحنی کے ایک نصف پر کا حاصل افقی دباؤ دریافت کرو۔

۴۔ ایک مجوف، قائم، مستدیر اسطوانہ کو پانی سے بھر کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے، اگر محور میں سے گذرنے والی ایک سطح اسطوانہ کے دو برابر

حصے کرے تو سطح منحنی کے ایک نصف پر جو حاصل مجموعی دباؤ
ہے اس کی مقدار اور خطِ عمل دونوں دریافت کرو۔
۵۔ ایک برتن ایک قائم، مستدیر اسطوانے کی شکل کا ہے اس کو
اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، آدھا برتن
پانی سے بھرا گیا ہے باقی آدھے میں کوئی دوسرا سیّال ڈالا گیا ہے
جو پانی کے ساتھ نہیں ملتا اور جس کی کثافت اضافی ۲ ہے، اگر
اسطوانے کے محور میں سے گذرنے والی ایک سطح اسطوانے
کے دو حصے کرے تو سطح منحنی کے ایک نصف پر کے حاصل
مجموعی دباؤ کی سمت دریافت کرو۔
۶۔ ایک افقی پیالہ کی انتصابی تراش نصف دائرہ ہے، پیالہ کو پانی
سے بھرا گیا ہے جس کا وزن و ہے، اگر ایسا خیال کیا جائے
کہ پیالہ کے وسط میں سے اس کو دو مساوی حصوں میں تقسیم
کیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ پانی اُن دو حصوں کو قوت $\frac{و}{\pi}$ سے
افقی سمت میں الگ الگ کرنے کی کوشش کریگا اور نیز ثابت
کرو کہ پیالہ کے کسی ایک نصف پر کا حاصل مجموعی دباؤ انتصابی
خط کے ساتھ زاویہ $\text{مم}^{-1}\frac{\pi}{2}$ بناتا ہے۔
۷۔ ایک سطح مستوی ایک ٹھوس، قائم، مستدیر، مخروط کے محور
میں سے گذرتی ہے اور مخروط کو دو مساوی حصوں میں تقسیم
کرتی ہے۔ اگر ایک حصہ پانی کے اندر اسطرح ڈالا جائے کہ
اس کا راس نیچے کی طرف ہو اور یہ حصہ پانی میں علین
ڈوب جائے تو اس کی سطح منحنی پر کا حاصل مجموعی

دباؤ معلوم کرو، نیز ثابت کرو کہ اس دباؤ کا خطِ عمل افق کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ ($\frac{\pi}{2}$ مس عہ) بناتا ہے جہاں عہ مخروط کے راسی زاویہ کا نصف ہے۔

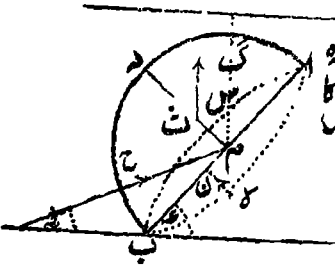
۸۔ ایک ٹھوس، قائم، مستدیر، مخروط کسی متجانس الاجزا شے سے بنایا گیا ہے، اس کا راسی زاویہ ۲ عہ ہے اور ارتفاع ف، یہ پانی کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا نقطۂ راس نیچے کی طرف ہے، محور انتصابی ہے اور اس کے محور کا طول فَ پانی کے اندر ہے، مخروط کے محور میں سے گذرنے والی ایک انتصابی سطح مخروط کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے اور یہ حصے نقطۂ راس پر ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ دو حصے باہم پیوستہ رہینگے اگر فَ $>$ ف جب^{2} عہ

[دفعات ۴۵ اور ۵۲ کی رو سے ایک حصہ پر جو مجموعی دباؤ ہے اس کے افقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی اور نیز ان کے نقاطِ عمل معلوم ہو سکتے ہیں - ان قوتوں کے جو معیارِ اثر راس کے گرد ہیں اگر ان کا مجموعہ ایک حصہ کے وزن کے معیارِ اثر سے زیادہ ہو تو یہ دونو حصے جدا نہیں ہوں گے]

۹۔ ایک پتلا مجوّف برتن ایک قائم مخروط کی شکل کا ہے اور اس کا پیندا مستدیر ہے، محور میں سے گذرنے والی ایک سطح برتن کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے جن کو راس پر ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے اور اس کے کناروں پر

چربی لگادی گئی ہے تاکہ پانی باہر نہ جائے، اگر برتن کو راس سے لٹکایا جائے اور راس کے نزدیک ایک چھوٹے سوراخ میں سے برتن میں پانی بھرا جائے تو ثابت کرو کہ اگر برتن کا راسی زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہو تو پانی باہر نہیں نکلے گا۔

۵۵ - اگر کوئی سطح کسی مستوی خطِ منحنی سے گھری ہوئی ہو تو دفعہ ۵۲ کی مدد کے بغیر ان پر کا حاصل مجموعی دباؤ بعض اوقات زیادہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے، یہ طریقہ اگلی دفعہ کی مثالوں سے بخوبی واضح ہو گا۔

۵۶ - **مشق ۱**- ایک نصف کرہ پانی کے اندر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کے مرکز کی گہرائی سطحِ آب کے نیچے گ ہے اور اس کا مستوی قاعدہ افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے، سطحِ منحنی پر کے حاصل مجموعی دباؤ کی مقدار اور سمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نصف کرہ کا مستوی قاعدہ اس ب ہے نیز اس کا نصف قطر ر ہے، اس کا مرکز م اور مرکز ثقل ث ہے، دفعہ ۴۹ کی رو سے پورے جسم پر کا حاصل مجموعی دباؤ ہٹائے ہوئے پانی کے وزن یعنی $\frac{2}{3}\pi r^3 d$ کے مساوی ہے اور نقطہ ث میں سے انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔

لیکن یہ مجموعی دباؤ ذیل کی دو قوتوں کا حاصل ہے۔

(۱) ایک قوت لا جو مستوی قاعدہ اس ب پر کا مجموعی دباؤ ہے، یہ دباؤ بموجب دفعہ ۲۹، π اَ^۲ گ دِ کے مساوی ہے اور مستوی قاعدہ کے کسی نقطہ ن پر عموداً عمل کرتا ہے، جسم کے متشاکل ہونے کی وجہ سے ظاہر ہے کہ نقطہ ن، ا ب پر واقع ہوگا۔

(۲) دوسری قوت اُن دباؤں پر مشتمل ہے جو سیّال نصف کرہ کی سطح منحنی کے مختلف نقاط پر ڈالتا ہے، ایسے ہر ایک دباؤ کی سمتِ عمل کرہ کی سطح پر عمود وار ہوگی اور اس لئے مرکز م میں سے گزرے گی۔

پس سطح منحنی پر کا حاصل مجموعی دباؤ کسی قوت ح کے مساوی ہوگا اور اس کا خطِ عمل افق کے ساتھ کوئی زاویہ فہ بنائے گا۔ ح اور لا کے حاصل کو انتصابی مجموعی دباؤ $\frac{۲}{۳}$ π اَ^۳ دِ کے مساوی رکھنے سے

$\frac{۲}{۳}$ π اَ^۳ دِ = ح جب فہ + لا جم عہ = ح جب فہ + π اَ^۲ گ دِ جم عہ

۰ = ح جم فہ − لا جب عہ = ح جم فہ − π اَ^۲ گ دِ جب عہ

∴ ح جب فہ = π اَ^۲ دِ [$\frac{۲}{۳}$ اَ − گ جم عہ]

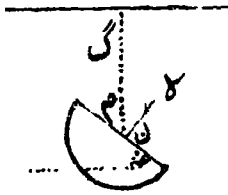
اور ح جم فہ = π اَ^۲ دِ گ جب عہ

∴ ح = π اَ^۲ دِ √(($\frac{۲}{۳}$ اَ − گ جم عہ)^۲ + گ^۲ جب^۲ عہ)

$$= \text{ﭐ} \, اَ^{۲} \, دِ \sqrt{گ^{۲} - \frac{۴ اَ گ}{۳} جم عہ + \frac{۴ اَ^{۲}}{۹}}$$

$$\text{اور مس فہ} = \frac{\frac{۲}{۳} اَ - گ جم عہ}{گ جب عہ} = \frac{۲ اَ - ۳ گ جم عہ}{۳ گ جب عہ}$$

اس طرح سے ہمیں سطح منحنی پر کے حاصل مجموعی دباؤ کی مقدار اور سمت معلوم ہو گئی۔

نتیجہ صریح ۔ اگر مستوی قاعدہ اس طرح ہو جیساکہ ساتھ کی شکل میں تو مجموعی دباؤ لا نیچے کی طرف عمل کرے گا اور مندرجہ بالا مساواتیں یہ ہو جائیںگی

$$\frac{۲}{۳} \text{ﭐ} \, اَ^{۳} دِ = ح \, جب \, فہ - لا \, جم \, عہ$$

$$. = ح \, جم \, فہ - لا \, جب \, عہ$$

$$\text{ان سے } ح = \text{ﭐ} \, اَ^{۲} \, دِ \sqrt{گ^{۲} + \frac{۴ اَ گ}{۳} جم عہ + \frac{۴ اَ^{۲}}{۹}}$$

$$\text{اور مس فہ} = \frac{۲ اَ + ۳ گ جم عہ}{۳ گ جب عہ}$$

مشق ۲ ۔ ایک مستوی دائرہ پانی کے اندر ڈبویا گیا ہے، اس کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

مثال بالا میں لا کا جو معیارِ اثر م کے گرد ہے وہ مساوی ہے اُس معیار اثر کے جو قوت $\frac{۲}{۳}$ ﭐ اَ^۳ دِ کا م کے گرد ہے

اور یہ دوسری قوت ث میں سے عمل کرتی ہے، نیز ظاہر ہے کہ
ح کا معیار اثر م کے گرد صفر ہے کیونکہ یہ قوت م میں سے
گذرتی ہے

$$\therefore \text{ل} \times \text{م ن} = \frac{۲}{۳}\pi\,\text{ر}^{۳}\,\text{و} \times \text{م ث جب عہ}$$

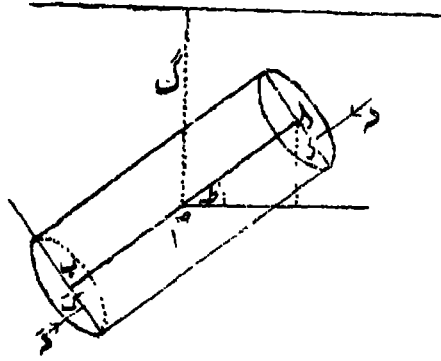
$$\text{یعنی } \pi\,\text{ر}^{۲}\,\text{گ و} \times \text{م ن} = \frac{۲}{۳}\pi\,\text{ر}^{۳}\,\text{و} \times \frac{۳\text{ر}}{۸}\,\text{جب عہ} \ldots\ldots$$

[علم سکون دفعہ ۲۲۵]

$$\therefore \text{م ن} = \frac{۱}{۴}\,\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{گ}}\,\text{جب عہ}$$

پس ثابت ہوا کہ کسی مستوی دائرہ پر کے دباؤ کا مرکز اس کے
مرکز ہندسی سے ہمیشہ $\frac{\text{ر}^{۲}}{۴\text{گ}}$ جب عہ کے فاصلہ پر ہوتا ہے

نتیجہ صریح - اگر غرق شدہ دائرہ کی سطح انتصابی ہو یعنے
عہ = ۹۰° تو م ن = $\frac{\text{ر}^{۲}}{۴\text{گ}}$ اور اس لئے ایسی صورت میں
دباؤ کے مرکز کی گہرائی مائع کی سطح کے نیچے گ + $\frac{\text{ر}^{۲}}{۴\text{گ}}$ ہوگی جہاں
ر دائرہ کا نصف قطر ہے اور گ مائع کے سطح کے نیچے
اس کے مرکز کی گہرائی ہے۔

مشق ۳- ایک اسطوانہ جس کے دونوں سرے بند ہیں پانی کے
اندر پورا غرق کیا گیا ہے، اگر اس کا ارتفاع ف اور نصف
قطر ر ہو اور اس کا محور افق سے زاویہ طہ بنائے تو اس کی منحنی
سطح پر کے حاصل افقی اور حاصل انتصابی دباؤ دریافت
کرو -

اگر محور کے وسطی نقطہ م کی گہرائی گ ہو تو اوپر کے مستوی سرے کے مرکز ا کی گہرائی = گ - $\frac{ف}{۲}$ جب طہ،
اور اس مستوی سرے پر کا مجموعی دباؤ د

$$= \pi \; ر^۲ \left(گ - \frac{ف}{۲} جب\ طہ\right) و_۱ \quad (دفعہ ۳۹) \ldots\ldots (۱)$$

نیز نچلے مستوی سرے کے مرکز ب کی گہرائی = گ + $\frac{ف}{۲}$ جب طہ
اور اس طرح سے اس سرے پر کا دباؤ دَ

$$= \pi \; ر^۲ \left(گ + \frac{ف}{۲} جب\ طہ\right) و_۱ \ldots\ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ اسطوانہ کی منحنی سطح پر کے مجموعی دباؤ افقی اور انتصابی سمتوں میں بالترتیب ق اور ص ہیں جہاں ق بائیں جانب عمل کرتا ہے اور ص سمت راس میں۔
اب ص اور ق اور مستوی سروں پر کے مجموعی دباؤں د

ایک نقطہ پر بندھا ہے بلا تکلف لٹکایا گیا ہے، منحنی سطح پر کے حاصل مجموعی دباؤ کا میلان افق سے دریافت کرو۔

۴۔ ایک قائم مخروط کو پانی سے بھر کر بند کردیا گیا ہے اور ایک میز پر اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا تکوینی خط میز کو مس کرتا ہے، منحنی سطح پر کے حاصل افقی اور حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو۔

۵۔ ایک ٹھوس مخروط کو پانی کے اندر اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک تکوینی خط پانی کی سطح کے اندر ہے، ثابت کرو کہ منحنی سطح پر کا حاصل مجموعی دباؤ سمت انتصابی سے زاویہ

مس$^{-1}$ $\frac{\text{۳ مس ع}}{\text{۱ − ۲ مس}^2\text{ ع}}$ بناتا ہے جہاں ۲ ع مخروط کا راسی زاویہ ہے

۶۔ ایک مخروط ایک مائع کے اندر تیر رہا ہے اور اس کا محور متوازی الافق ہے، اگر مائع کی کثافت مخروط کی کثافت کی دوچند ہو تو مخروط کے قاعدہ پر کا دباؤ معلوم کرو، نیز ثابت کرو کہ اگر سطح منحنی پر کا حاصل مجموعی دباؤ خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائے اور اگر مخروط کا راسی زاویہ ۲ ع ہو تو

$$\text{مس ط} = \frac{۴}{۱۱}\ \text{مس ع}$$

۷۔ ایک مجوف مخروط کا زاویۂ راس ۲ ع ہے، اس کو پانی سے بھر کر ایک سطح مائل پر اس طرح لٹا دیا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے، اگر سطح مائل اسقدر کھردری ہو کہ مخروط کو پھسلنے نہ دے اور اس کا زاویۂ میلان افق سے ب ہو تو مخروط

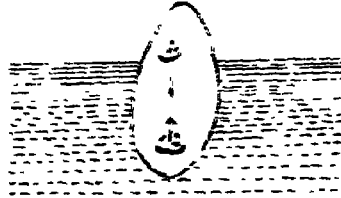
کی منحنی سطح پر کے حاصل افقی اور حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔
۸۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک بند برتن ہے جس کے دونوں سرے نصف کرہ کی شکل کے ہیں، برتن کو پانی سے بھر کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور افق کے متوازی ہے، ہر ایک سرے پر کا حاصل مجموعی دباؤ دریافت کرو اور اس کا خطِ عمل بھی معلوم کرو۔
۹۔ ایک بے وزن کرہ کو ایک انتصابی مستوی سطح کے ذریعہ دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور کرہ کے سب سے نچلے نقطہ پر ایک قبضہ لگانے سے ان حصوں کو باہم وصل کر دیا گیا ہے، اب اگر کرہ میں اس قدر پانی ڈالا جائے جو اس کو عین بھر دینے کے لئے کافی ہو اور ایک رسی نصف کروں کے سب سے اونچے نقاط کو باہم ملائے رکھے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ کرہ کے اندر کے پانی کے وزن کا $\frac{3}{8}$ گنا ہے۔
۱۰۔ ایک دھات کی باریک یکساں چادر سے دو نصف کرے بنائے گئے ہیں جو ایک دوسرے پر خوب پھنس کر آتے ہیں، ان کے کناروں کو ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کر دیا گیا ہے اور اس کروی خول کو آب بند بنانے کے لئے کناروں پر چربی لگادی گئی ہے اگر خول کو ایک رسی کے ذریعہ قبضہ سے لٹکایا جائے اور قبضہ پر کے ایک سوراخ سے خول کو پانی سے بھر دیا جائے تو ثابت کرو کہ نصف کروں کا باہمی تماس قائم رہے گا اگر خول کا وزن اس پانی کے وزن کے

سہ چند سے زیادہ ہو جو خول کو بھرنے کے لئے عین کافی ہوتا ہے
نوٹ نتیجہ دفعہ ۴۹ (یا ۵۰) اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے، ایسا خیال کرو کہ جسم ہٹا لیا گیا ہے اور جگہ ن ی ق ر ن کو مزید مائع سے بھر دیا گیا ہے جس سے باقی مائع پر کسی قسم کا اثر نہیں پڑتا۔
اب اس مزید مائع کی سطح کے ہر ایک جزو پر کا دباؤ وہی ہے جو جسم کے متناظر جزو پر تھا، (دفعہ ۴۸) اسلئے جسم پر کا حاصل مجموعی دباؤ وہی ہے جو زائد مائع پر کا حاصل مجموعی دباؤ ہے، لیکن یہ حاصل مجموعی دباؤ مزید مائع کے وزن کا موازنہ کرتا ہے، اس لئے وغیرہ وغیرہ

باب پنجم

تیرنے والے اجسام کا توازن

۵۷ ۔ ایک جسم پانی کے اندر بلا تکلف تیر رہا ہے، اس کے توازن کی شرائط معلوم کرو۔

ایک تیرنے والے جسم کے توازن پہ غور کرو جو جزءً یا کلاً پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہو۔

جسم پر صرف دو انتصابی قوتیں عمل کرتی ہیں۔

(۱) جسم کا وزن جو اس کے مرکزِ ثقل ث ہیں سے عمل کرتا ہے۔

(۲) جسم پر کا حاصل انتصابی دباؤ جو ہٹائے ہوے مائع کے وزن کے مساوی ہے اور اُچھال کے مرکز یعنی ہٹائے

ہوئے مائع کے مرکز ثقل ث میں سے عمل کرتا ہے۔
توازن کے لئے ضروری ہے کہ یہ قوتیں باہم مساوی اور متقابل ہوں اس لئے مطلوبہ شرائط یہ ہیں
(۱) ہٹائے ہوئے مائع کا وزن جسم کے وزن کے مساوی ہو
(۲) جسم کا مرکز ثقل اور ہٹائے ہوئے مائع کا مرکز ثقل ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہوں۔

۵۸۔ مشق ۱۔ لکڑی کا ایک اسطوانہ جسکا ارتفاع ۶ فٹ اور وزن ۵۰ پونڈ ہے پانی کے اندر تیر رہا ہے، لکڑی کی کثافت اضافی $\frac{۳}{۴}$ ہے، اگر اس کی اوپر کی سطح پر ۱۰ پونڈ کا وزن رکھدیا جائے تو معلوم کرو کہ یہ اور کتنا پانی کے اندر چلا جائیگا

فرض کرو کہ اسطوانہ کی تراش کا رقبہ ا ہے، تب

$$۵۰ = ا \times ۶ \times \frac{۳}{۴} \times و_۱ = ا \times ۶ \times \frac{۳}{۴} \times ۶۲\frac{۱}{۲}$$

$$\text{پس } ا = \frac{۸}{۴۵} \text{ مربع فٹ}$$

اگر لکڑی پر ۱۰ پونڈ کا وزن رکھا جائے تو فرض کرو کہ پانی کے اندر لا فٹ غرق ہو جاتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ پانی کے ایک ایسے اسطوانہ کا وزن جس کی تراش ا ہو اور جس کا ارتفاع لا ہو ۱۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

$$\therefore ۱۰ = ا \times لا \times و_۱ = \frac{۸}{۴۵} \times لا \times ۶۲\frac{۱}{۲}$$

$$\therefore لا = \frac{۹}{۱۰} \text{ فٹ}$$

مشق ۲۔ ایک شخص کا وزن ۱۶۰ پونڈ ہے اور اس کی اضافی کثافت ۱٫۱ ہے، وہ ایک کاگ کے ٹکڑے کے ذریعہ

جو پورا پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے پانی میں اسطرح ساکن رہ سکتا ہے کہ اس کا سر عین پانی کے باہر ہوتا ہے ۔ اگر اسکے سر کا حجم اس کے کل حجم کا $\frac{1}{16}$ ہو اور کاگ کی اضافی کثافت ۲۴ء ہو تو کاگ کا حجم دریافت کرو۔

اگر پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۶۲½ پونڈ ہو اور آدمی کا حجم ح ہو تو

$$160 = ح \times \frac{11}{10} \times 62\frac{1}{2}$$

$$\text{یعنی } ح = \frac{128}{55} \text{ مکعب فٹ}$$

اب چونکہ آدمی اور کاگ کا وزن لازماً ہٹائے ہوئے مائع کے وزن کے مساوی ہے اسلئے اگر کاگ کا حجم حَ مکعب فٹ ہو تو

$$160 + \acute{ح} \times .24 \times 62\frac{1}{2} = \left(\frac{15}{16}ح + \acute{ح}\right) \times 1 \times 62\frac{1}{2}$$

$$\therefore \acute{ح} \times .76 \times 62\frac{1}{2} = 160 - \frac{15}{16} \times ح \times 62\frac{1}{2}$$

$$= 160 - \frac{15}{16} \times \frac{128}{55} \times \frac{125}{2}$$

$$\therefore \frac{95}{2}\acute{ح} = 160 - \frac{1500}{11} = \frac{260}{11}$$

$$\therefore \acute{ح} = \frac{2}{95} \times \frac{260}{11} = \frac{104}{209} \text{ مکعب فٹ}$$

مشق ۳۔ لکڑی کے ایک ٹکڑے اور نیز ربڑ کے ایک [illegible]

کرہ کو جس کے اندر ہوا ہے مصنوعی طور پہ الگ الگ وزنی بناکر پانی کے اندر ڈالا گیا ہے اور یہ دونوں جسم الگ الگ نہ پانی کے اندر عین تیر سکتے ہیں، اب اگر ان دونوں کو سمندر کے اندر ایک بڑی گہرائی پر لیجاکر چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ ہر صورت میں کیا واقع ہو گا؟

ایک متجانس الاجزا مائع کا حاصل مجموعی دباؤ ایک جسم پر سمت راس میں ہمیشہ وہی رہتا ہے خواہ جسم کی گہرائی مائع کی سطح کے نیچے کچھ ہی ہو بشرطیکہ جسم کا حجم نہ بدلے۔

چونکہ دباؤ کے زیر عمل لکڑی دب نہیں سکتی اس لئے بڑی گہرائی پر بھی اس پر کا حاصل مجموعی دباؤ وہی ہو گا جو پانی کی سطح پر ہے، اس لئے اس گہرائی پر بھی وہ عین تیر سکنے کے قابل ہوگی۔

چونکہ سمندر کے پانی کا دباؤ بڑی گہرائی پر سطح کی نسبت زیادہ ہے اس لئے لچکدار کرہ اس کے زیر عمل پچک یا سکڑ جائے گا اور چونکہ اس کا حجم کم ہو جائے گا اس لئے ہٹائے ہوئے پانی کی مقدار سطح کی نسبت کم ہو گی۔

پس حاصل انتصابی دباؤ اس طرح سے بہت کم ہو جائیگا اور کرہ جو سطح پر عین تیرنے کے قابل تھا اب نیچے ڈوبتا جائے گا۔

امثلہ نمبری ۱۰

۱- ایک شخص وزنی ۱۶۰ پونڈ پانی کے اندر اس حالت میں

رہ سکتا ہے کہ اس کے جسم کا ۴ مکعب انچ پانی کے اوپر رہتا ہے،
اُس کا حجم مکعب فٹوں میں دریافت کرو۔
۲۔ لوہے کی کثافتِ اضافی ۷ ہے اور کاگ کی ۱/۴، ایک
پونڈ کاگ کے ساتھ لوہے کا کتنا وزن باندھا جائے کہ دونوں
مل کر پانی میں عین تیر سکیں۔
۳۔ ایک جسم پانی میں عین تیر سکتا ہے، جب اس کو گندھک
کے تیزاب میں ڈالا جاتا ہے جس کی کثافتِ اضافی ۱٫۸۵ ہے
تو اس کو ڈبونے کے لئے مزید ۴۲٫۵ گرام وزن کی ضرورت
ہوتی ہے، اس جسم کا حجم دریافت کرو۔
۴۔ ایک غبارہ اس قدر پتلا ہے کہ اس کی موٹائی کو نظرانداز کیا
جا سکتا ہے، اس میں ۱٫۵ مکعب فٹ کوئلہ کی گیس بھری ہوئی
ہے اور اُس کا کل وزن مع گاڑی و دیگر سازو سامان کے ایک
اونس ہے، یہ غبارہ ایک کمرہ کے اندر عین معلّق رہ سکتا ہے،
گیس کی کثافت اضافی (۱) بلحاظ ہوا کے اور (۲) بلحاظ پانی کے
معلوم کرو جبکہ ہوا کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱٫۲ اونس ہو۔
۵۔ ہوا کے ایک لیٹر (یعنی ایک مکعب دسی میٹر) کی کمیت
۱٫۲ گرام ہے اور ہائیڈروجن کے ایک لیٹر کی ۰٫۰۸۹ گرام،
ایک خالی غبارہ کا وزن ۵۰ گرام ہے اور اس کو ہائیڈروجن سے
بھرا گیا ہے، معلوم کرو کہ غبارہ کا کیا حجم ہو کہ یہ ہوا میں عین
معلّق رہ سکے۔
۶۔ لوہے کا ایک ٹکڑا جس کا وزن ۲۷۵ گرام ہے پارہ میں

تیر رہا ہے، اگر اس کے حجم کا $\frac{۵}{۹}$ حصہ پارہ کے اندر ڈوبا ہوا ہو اور پارہ کی کثافت ۱۵٫۵۹ ہو تو لوہے کی کثافت اضافی اور حجم معلوم کرو۔

۷۔ یخ کا ایک تودا مکعب شکل کا ہے اور پانی کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے اُس حصہ کی اونچائی جو سطح آب سے باہر ہے ۳۰ فٹ ہے۔ اگر یخ کی کثافت کو پانی کی کثافت سے نسبت ٫۹۱۸ : ۱٫۰۲۵ ہو تو معلوم کرو کہ پانی کی سطح کے نیچے اِس کی کیا گہرائی ہے۔

۸۔ ایک جہاز کی کمیت ۱۰۰۰ ٹن ہے، خطِ آب پر اس کی تراش کا رقبہ ۱۵۰۰۰ مربع فٹ ہے اور سطح آب سے اوپر اس کے پہلو انتصابی ہیں، اگر نمکین پانی کی کثافت اضافی ۱٫۰۲۶ ہو تو بتاؤ کہ جہاز تازہ پانی سے نمکین پانی میں جانے پر کتنا اوپر اٹھ آئیگا۔

۹۔ ایک جہاز جب سمندر سے دریا میں آتا ہے تو ا انچ اور ڈوب جاتا ہے۔ لیکن جب اُس میں سے لا ٹن وزن کا اسباب اتار لیا جاتا ہے تو وہ ب انچ اوپر اٹھ آتا ہے، اگر سمندر کا پانی دریا کے پانی سے $\frac{۱}{۴۰}$ گنا زیادہ بھاری ہو تو ثابت کرو کہ جہاز کی کمیت ۴۱ $\frac{ا}{ب}$ لا ٹن ہے۔

۱۰۔ لکڑی کے ایک مکعب شکل کے ٹکڑے کا ہر ایک کنارہ ایک فٹ ہے اور یہ تازہ پانی کے دریا میں اس طرح بہتا ہوا سمندر کی طرف جارہا ہے کہ اس کے دو رخ متوازی الافق ہیں، سمندر میں پہنچنے کے بعد وہ برف باری کی وجہ سے اتنا ہی پانی

کے اندر ڈوبا رہتا ہے جتنا کہ دریا میں تھا، لکڑی کی کثافت اضافی ۸ ، ہے اور سمندر کے پانی کی ۱،۰۲۵، ثابت کرو کہ ٹکڑے پر جو برف پڑی ہے اس کا وزن ۲۰ اونس ہے۔

۱۱۔ انار کے درخت کی لکڑی کا ایک ٹکڑا جس کی کثافت ۱،۳۵ ہے ایک ہلکی قسم کی لکڑی کے ٹکڑے سے باندھا گیا ہے، مؤخرالذکر لکڑی کی کثافت ۶۵، ہے، اگر دونوں ملکر پانی میں تیر سکنے کے عین قابل ہوں تو ثابت کرو کہ دونوں ٹکڑوں کے حجم مساوی ہیں۔

۱۲۔ کاگ کے ایک ٹکڑے کا وزن ۱۹ اونس ہے، اس کو چاندی کی ایک سلاخ کے ساتھ جس کا وزن ۶۳ اونس ہے باندھ دیا گیا ہے اور دونو ملکر پانی میں تیرنے کے عین قابل ہیں، اگر چاندی کی کثافت اضافی ۱۰،۵ ہو تو کاگ کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۳۔ ایک یکساں تراش کی سلاخ کا کچھ حصہ پلاٹی نم کا بنا ہوا ہے اور کچھ حصہ لوہے کا، پلاٹی نم کی کثافت اضافی ۲۱ ہے اور لوہے کی ۷،۵، اگر پلاٹی نم کا حصہ ۲ انچ لمبا ہو اور سلاخ پارہ (کثافت اضافی ۱۳،۵) میں اس طرح تیر سکے کہ ایک انچ پارہ کی سطح سے باہر رہے تو لوہے کے حصہ کا طول دریافت کرو۔

۱۴۔ سونے کے ایک ٹکڑے کی کثافت اضافی ۱۹،۲۵ ہے اور اس کا وزن ۹۶،۲۵ گرام ہے، اگر اس ٹکڑے کو پانی میں ڈالا جائے تو ہٹائے ہوئے پانی کا وزن ۶ گرام ہوتا ہے، معلوم کرو کہ ٹکڑا اندر سے کھوکھلا ہے یا نہیں، اگر ہے تو اس کے اندر کسقدر خلا ہے۔

۱۵۔ ایک آدمی کی کثافت اضافی ۱،۱ ہے اور اس کا وزن ۱۰ اسٹون

ہے، وہ کاگ کے ایک ٹکڑے کو پانی کے اندر تھام رکھنے سے عین تیر سکتا ہے، اگر کاگ کی کثافت اضافی ۲۴ء ہو تو کاگ کا حجم دریافت کرو۔

۱۶۔ اسطوانہ کی شکل کی ایک پنسل پانی میں اس طرح تیر سکتی ہے کہ اس کے حجم کا $\frac{1}{2}$ حصہ پانی کے اندر ڈوبا رہتا ہے، اگر پنسل کا سرمہ اسطوانہ کی شکل کا ہو اور اس کا نصف قطر پنسل کے نصف قطر کا ایک چوتھائی ہو تو سرمہ کی کثافت اضافی دریافت کرو جبکہ لکڑی کی کثافت اضافی ۸۷ء ہے۔

۱۷۔ لکڑی کا ایک ٹکڑا ایک سیّال میں اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کے حجم کا $\frac{4}{5}$ ڈوبا رہتا ہے، دوسرے سیّال میں اسکے حجم کا $\frac{2}{3}$ ڈوبا رہتا ہے، اگر دونو سیّالوں کے مساوی وزنوں کو ملایا جائے تو دریافت کرو کہ آمیزہ میں لکڑی کے حجم کی کونسی کسر ڈوب جائے گی۔

۱۸۔ ایک سیّال میں ایک جسم کے حجم کا $\frac{1}{ا}$ ڈوب سکتا ہے، دوسرے میں اس کے حجم کا $\frac{1}{ب}$ اور تیسرے میں $\frac{1}{ج}$، اگر تینوں سیّالوں کے مساوی (۱) حجموں (۲) وزنوں سے آمیزے تیار کئے جائیں تو معلوم کرو کہ ان میں جسم مذکور کے حجم کی کونسی کسریں ڈوب جائینگی۔

۱۹۔ لکڑی کا ایک مکعب پانی میں تیر رہا ہے، اس کے اوپر کے رخ پر لوہے کا ایک ٹکڑا رکھا گیا ہے جسکی کمیت ۲۶ پونڈ ہے، اس کی وجہ سے مکعب مذکور پانی میں اتنا اور ڈوب جاتا ہے کہ اس کے اوپر کے رخ کی سطح پانی کی سطح میں آجاتی ہے، پھر

اس لوہے کے ٹکڑے کو ہٹاکر مکعب کی نچلی سطح کے ساتھ ایک اور لوہے کا ٹکڑا باندھا جاتا ہے جس کی وجہ سے مکعب کی چوٹی پہلے کی طرح پانی کی سطح میں آجاتی ہے، دوسرے ٹکڑے کی کمیت دریافت کرو، لوہے کی کثافت اضافی ۵ء ۷ ہے۔

۲۰۔ ایک مجوف مکعب صندوق لکڑی کے ایک انچ موٹے تختے سے بنایا گیا ہے، باہر سے اس کے ہر ایک کنارے کا طول ایک فٹ ہے، مکعب پانی میں اس طرح تیرتا ہے کہ $\frac{3}{4}$۲ انچ کی گہرائی تک پانی میں ڈوبا رہتا ہے، معلوم کرو کہ مکعب کے اندر کتنے مکعب انچ پانی ڈالا جائے کہ اندر کے پانی کی ہمواری وہی ہو جائے جو باہر کے پانی کی ہے، اس صورت میں صندوق پانی کے اندر کتنا ڈوبا ہوا ہوگا۔

۲۱۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کا وزن و ہے، اس کے ایک سرے پر ایک وزن و۱ باندھا گیا ہے جس کے حجم کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے، سلاخ پانی کے اندر ترچھی حالت میں تیر رہی ہے، اور اس کی لمبائی کا $\frac{1}{ن}$ حصہ پانی کے باہر ہے، ثابت کرو کہ

(ن - ۱) و۱ = و

۲۲۔ ایک پتلی اسطوانہ کی شکل کی سلاخ کے ایک سرے پر وزن باندھا گیا ہے، یہ سلاخ پانی میں اس طرح تیرتی ہے کہ اس کے طول کا نصف پانی میں ڈوبا رہتا ہے اور اس کی سمت افق کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ بندھا ہوا وزن سلاخ کے وزن کے برابر ہے۔

۲۳۔ ایک پتلی یکسان سلاخ کے ایک سرے پر بھاری دھات کا ایک ٹکڑا باندھا گیا ہے جس کا حجم نظر انداز ہو سکتا ہے، سلاخ پانی میں اس طرح تیر رہی ہے کہ اس کے طول کا نصف پانی کے اندر ڈوبا رہتا ہے اور اس کی سمت افق کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سلاخ کی کثافت اضافی $\frac{۳}{۴}$ ہے۔

۲۴۔ ایک سلاخ کی کثافت ک‌ہے اور اس کی عمودی تراش بہت چھوٹی ہے، اس کے ایک سرے پر ایک بھاری دھات کا بہت چھوٹا ٹکڑا باندھا گیا ہے جس کا وزن سلاخ کے وزن کا $\frac{۱}{ن}$ ہے، ثابت کرو کہ سلاخ ایک ایسے سیال کے اندر جس کی کثافت اضافی ک‌ہے کسی ترچھی حالت میں تیر سکے گی اگر

$$(ن + ۱)^۲ ک_۱ = ن^۲ ک_۲$$

۲۵۔ ایک بوتل جس کے اندر کچھ پانی ہے اور کچھ ہوا، پانی میں اس طرح تیر رہی ہے کہ اس کی گردن نیچے کی طرف ہے، ثابت کرو کہ اگر بوتل کو پانی کے اندر کسی خاص گہرائی تک ڈبویا جائے تو چھوڑنے پر یہ ڈوب کر تہ سے جا لگے گی۔ کس شرط کے ماتحت وہ نقطہ معلوم ہوگا کہ اگر بوتل کو اس پر چھوڑ دیا جائے تو بوتل نہ اوپر آئے اور نہ ڈوبے۔

۲۶۔ تازہ پانی کے اندر ایک دخانی جہاز اور اُس کے کل مال واسباب کا مجموعی وزن خطِ آب پر فی انچ ۲۰ ٹن کے مساوی ہوتا ہے۔ جہاز میں روزانہ ۶۰ ٹن کوئلہ صرف ہوتا ہے، ۱۰ دن کے بعد سمندر کے پانی میں جہاز ۲ فٹ اوپر اٹھ آتا ہے، اگر ایک مکعب

فٹ سمندر کے پانی کا وزن ۶۴ پونڈ ہو اور تازہ پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۶۲٫۵ پونڈ ہو تو ثابت کرو کہ تازہ پانی میں جہاز کا آبی ہٹاؤ (یعنی ہٹائے ہوئے پانی کا وزن) ۵۰۲ ٹن ہے۔

۲۷۔ ایک ٹھوس مخروط کی کثافت ک ہے اور اس کے محور کا ارتفاع ف ہے، یہ ایک سیّال میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اگر سیّال کی کثافتِ اضافی کَ (> ک) ہو تو معلوم کرو کہ مخروط کا محور کتنا سیّال کے باہر رہے گا۔

۲۸۔ ایک مخروط کی اونچائی ۷ انچ ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ۲ انچ ہے، اس کے قاعدہ کے ساتھ ایک نصف کرہ جس کا قطر بھی ۲ انچ ہے چسپان کردیا گیا ہے، مخروط کی کثافت اضافی $1\frac{1}{2}$ ہے اور نصف کرہ کی $1\frac{3}{4}$ ہے، یہ دونوں ایک سیّال کے اندر اس طرح تیر رہے ہیں کہ مخروط کے محور کا صرف ۳ انچ طول سیّال کے باہر رہتا ہے، سیّال کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۲۹۔ ایک متجانس الاجزا جسم قائم مستدیر، مخروط کی شکل کا ہے، ثابت کرو کہ یہ ایک ایسے سیّال کے اندر جس کی کثافت اضافی جسم کی کثافت اضافی کا دو چند ہو اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کا محور افق کے متوازی رہے۔

۳۰۔ ایک مجوف مخروطی برتن پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور اس کا محور ایک خاص ارتفاع تک پانی میں ڈوبا ہوا ہے، اگر اس ارتفاع تک مخروط کے ڈوبے ہوئے حصہ میں پانی بھر دیا جائے تو مخروط اتنا اور ڈوب جاتا ہے

کہ اس کا قاعدہ باہر کے پانی کی سطح میں آجاتا ہے، معلوم کرو کہ محور پہلے کس ارتفاع تک ڈوبا ہوا تھا۔

۵۹ - ایک جسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کا کچھ حصہ ایک سیّال میں ڈوبا ہوا ہے اور باقی حصہ دوسرے سیّال میں، توازن کی شرائط معلوم کرو۔

ظاہر ہے کہ جسم کا وزن دو سیّالوں کے حاصل انتصابی دباؤ کے مساوی ہوگا یعنی دو سیالون کے جو ہٹائے ہوئے حصے ہیں ان کے وزنوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا اور ان حصوں کے مرکزوں کو جو خط ملاتا ہے اس پر کے ایک ایسے نقطہ میں سے گذریگا جس میں سے ان حصون کے اوزان کا حاصل گذرتا ہے۔ [بموجب علم سکون دفعہ ۵۲]

اس صورت میں وہ جسم بھی شامل ہے جس کا کچھ حصہ ہوا میں ہو اور کچھ حصہ سیّال میں۔

۶۰ - **مشق ۱** - ایک برتن میں کچھ پارہ ہے اور کچھ پانی، لوہے کا ایک مکعب جس کا ہر ایک کنارہ ۵ سنتی میٹر ہے ان دو سیالوں میں اس طرح متوازن ہے کہ اس کے چار رخ انتصابی ہیں اور دو افقی، اگر لوہے اور پارے کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۷،۸ اور ۱۳،۶ ہوں تو بتاؤ کہ مکعب کتنا ایک سیال میں ہوگا اور کتنا دوسرے میں۔

فرض کرو کہ مکعب کا جو حصہ پارہ میں ہے اس کی اونچائی لا سنتی میٹر ہے، تب اس حصہ کی اونچائی جو پانی میں ہے

(۵ - لا) سنٹی میٹر ہوگی۔

چونکہ مکعب کا وزن ہٹائے ہوئے پارہ اور پانی کے وزنوں کے حاصل جمع کے برابر ہے

اسلئے ۵ × ۷٫۷ = لا × ۱۳٫۶ + (۵ - لا) × ۱

∴ لا = ۲ $\frac{۸۳}{۱۲۶}$ سنٹی میٹر

مشق ۲- لکڑی کا ایک ٹکڑا پانی کے ایک پیالہ میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کا $\frac{۹}{۱۰}$ ڈوبا ہوا ہے، اگر پیالہ کو ہوا پمپ کے قابلہ میں رکھ کر اس کی ہوا خارج کی جائے اور ہوا کی کثافت ۰٫۰۰۱۳ ہو تو بتاؤ کہ ہوا خارج کرنے سے لکڑی کے ڈوبنے پر کیا اثر پڑے گا۔

فرض کرو کہ لکڑی کے ٹکڑے کا حجم ح ہے اور ہوا نکالنے کے بعد اس کا لا ح حجم پانی میں ڈوبا ہوا ہے۔

پانی کے حجم $\frac{۹ح}{۱۰}$ کا وزن اور ہوا کے حجم $\frac{ح}{۱۰}$ کا وزن دونو ملکر پانی کے لا ح کے وزن کے برابر ہوتے ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک لکڑی کے وزن کے برابر ہے۔

∴ $\frac{۹ح}{۱۰}$ × ۱ + $\frac{ح}{۱۰}$ × ۰٫۰۰۱۳ = لا ح × ۱

∴ لا = ۰٫۹۰۰۱۳

پس ثابت ہوا کہ غرق شدہ حجم بڑھ جاتا ہے اور ۰٫۹ × ح کی بجائے ۰٫۹۰۰۱۳ × ح ہو جاتا ہے۔

امثلہ نمبری ۱۱

۱- ایک مستدیر اسطوانہ پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور

استغراق ہے اور آدھا پانی میں ڈوبا ہوا ہے۔ اگر ہوا کی کثافت اضافی ۰۰۱۳ء۰ ہو تو اسطوانہ کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۲- ایک مکعب کا کنارہ ایک انچ ہے اور اس کی کثافت اضافی ۱ء۲ ہے۔ مکعب کو ایک ایسے برتن میں ڈالا گیا ہے جس میں دو سیال ہیں جو آپس میں نہیں ملتے۔ ان دو سیالوں کی اضافی کثافتیں ۱ اور ۵ء۱ ہیں۔ معلوم کرو کہ مکعب کا کتنا حصہ نیچے کے سیال میں ڈوبا رہیگا۔

۳- ایک یکساں اسطوانہ پارہ میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور پارہ میں ۳۳۱۲ء۵ انچ ڈوبا ہوا ہے۔ جب پارہ کے اوپر ایک انچ کی گہرائی تک پانی ڈال دیا جاتا ہے تو محور پارہ کی سطح کے نیچے ۰۰۲۹۷ء۵ انچ غرق رہتا ہے۔ پارہ کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۴- ایک جسم سونے اور چاندی کو ملاکر بنایا گیا ہے۔ سونے کی کثافت اضافی ۱۹ء۲۵ ہے اور چاندی کی ۱۰ء۵ ہے۔ جسم مذکور اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کا ۵۱/۶۱ پارہ میں ڈوبا ہوا ہے اور باقی پانی میں۔ اگر پارہ کی کثافت اضافی ۱۳ء۶ ہو تو اس جسم میں سونے اور چاندی کے وزنوں کی نسبت معلوم کرو۔

۵- لکڑی کا ایک مستطیلی مجسّم جس کی اونچائی ۸ سنتی میٹر ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے اوپر کا رخ متوازی الافق ہے۔ لکڑی کی کثافت اضافی ۹ء ہے۔ پانی کے اوپر اتنا تیل ڈالا گیا ہے کہ لکڑی کا ٹکڑا تیل میں عین ڈوب جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ لکڑی پہلے کی نسبت ۲ سنتی میٹر اوپر اٹھ آئے گی۔ تیل کی کثافت اضافی ۸ء ہے۔

۶- ایک جسم کا کچھ حصہ ایک سیال میں ڈوبا ہوا ہے۔ اگر وہ ہوا

جو جسم کو مس کرتی ہے کسی طرح ہٹالی جائے تو بتاؤ کہ جسم
اوپر اٹھیگا یا اور نیچے ڈوب جائیگا۔

۷۔ ایک برتن میں دو ایسے سیال ڈالے گئے ہیں جو آپس میں
نہیں ملتے، نچلے سیال کی کثافت ک ہے اور اوپر کے سیال کی
م ک، ایک اسطوانہ ان دونو سیالوں میں ڈوبا ہوا ہے اور اس کا
محور انتصابی ہے، اگر اسطوانہ کی کثافت ن ک ہو تو کیا شرط پوری
ہونی چاہئے کہ آدھا اسطوانہ ایک سیال میں رہے اور آدھا
دوسرے میں۔

۸۔ ایک قابلہ کے اندر جس کی ہوا خارج کردی گئی ہے ایک پانی کا برتن
ہے جس میں ایک جسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا آدھا حجم
پانی کے اندر غرق ہے، تب قابلہ کے اندر اتنی ہوا بھر دی جاتی
ہے کہ اندر کی ہوا کی کثافت باہر کی ہوا کی کثافت کی ۸۰ گنی ہو جاتی
ہے، ثابت کرو کہ اگر کرہ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کی کثافت ۰۰۱۲۵ء
ہو تو مؤخرالذکر صورت میں غرق شدہ حجم کل حجم کا $\frac{۴}{۹}$ ہوگا۔

۹۔ کشید کئے ہوئے پانی کے ایک برتن کے اندر ایک مکعب
اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کا $\frac{۴}{۵}$ پانی میں ڈوبا ہوا ہے،
یہ برتن کو ایک مکثف کے اندر رکھ دیا ہے جس میں دباؤ ۱۰ ہوائی
کروں کے دباؤ کے برابر ہے، اگر کرہ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کی
کثافت اضافی ۰۰۱۳ء ہو تو معلوم کرو کہ غرق شدہ گہرائی میں کیا
تبدیلی واقع ہوگی۔

۱۰۔ ایک اسطوانہ کی کثافت ک ہے اور وہ دو سیالوں میں اسطرح

تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، اوپر کے سیّال کی کثافت ک_1 ہے اور نیچے کے سیّال کی ک_2، اگر اسطوانہ کا ارتفاع ف اوپر کے سیال کی گہرائی کا ن گنا ہو اور $\text{ک} < \text{ک}_2$ اور $> \text{ک}_2 - \frac{\text{ک}_2 - \text{ک}_1}{\text{ن}}$

تو ثابت کرو کہ اسطوانہ کے اوپر کا رخ بالاترین سطح سے $\frac{\text{ف}}{\text{ن}} - \text{ف}\,\frac{\text{ک}_2 - \text{ک}}{\text{ک}_2 - \text{ک}_1}$

گہرائی پر ہو گا۔

۱۱۔ ایک قائم، مستدیر، مخروط کی کثافت ک ہے، مخروط ایک برتن کے اندر جس میں دو سیّال ہیں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور قاعدہ بالا ترین سیّال کی سطح میں ہے، اگر سیّالوں کی کثافتیں ک_1، ک_2 ہوں، تو ثابت کرو کہ سیّالوں کی سطح مشترک مخروط کے محور سے اس کی لمبائی کا $\sqrt[3]{\frac{\text{ک} - \text{ک}_2}{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}}$ حصہ قطع کرتی ہے۔

۱۲۔ ایک جسم ایک سیّال میں پورا ڈوبا ہوا ہے اور ایک رسّی اسے سہارے ہوئے ہے، رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

جسم بر سمت راس میں عمل کرنے والی قوتیں صرف دو ہیں، ایک رسی کا تناؤ، دوسرے سیّال کا حاصل انتصابی دباؤ، اور آخرالذکر دفعہ ۴۹ کی رو سے ہٹائے ہوئے مائع کے وزن کے برابر ہے، سمت شاقولی میں صرف ایک قوت عمل کرتی ہے اور وہ جسم کا وزن ہے۔

اس لئے توازن کے لئے ضروری ہے کہ

رسّی کا تناؤ + ہٹائے ہوئے مائع کا وزن = جسم کا وزن
پس رسی کا تناؤ = جسم کا وزن - ہٹائے ہوئے مائع کا وزن

۶۲ - دفعہ گذشتہ میں رسی کا تناؤ مائع مفروض کے اندر جسم کے (ظاہری) وزن کے مساوی ہے۔ پس ثابت ہوا کہ کسی مائع میں ایک جسم کا ظاہری وزن اس کے اصلی وزن سے بقدر اس مائع کے وزن کے کم ہوتا ہے جس کو جسم مذکور اپنی جگہ سے ہٹا دیتا ہے۔

ایک جسم کا وزن و ہے اور اس کی کثافت اضافی ض ہے، اگر اس جسم کو پانی کے اندر غرق کیا جائے تو ہٹائے ہوئے پانی کا وزن $\frac{و}{ض}$ ہوگا، پس وزن میں جو ظاہری کمی واقع ہوئی ہے وہ $\frac{و}{ض}$ کے مساوی ہے۔ اگر جسم کو ایک ایسے سیّال کے اندر غرق کیا جائے جس کی کثافت اضافی ضَ ہو تو وزن میں جو ظاہری کمی واقع ہوگی وہ $\frac{و \times ضَ}{ض}$ کے مساوی ہوگی۔

یہ امر بالخصوص اس وقت قابل غور ہوتا ہے جب ہم کسی جسم کو ترازو سے یا کسی اور طرح سے تولتے ہیں۔ اگر ہم یہ چاہیں کہ تولنے کے عمل سے کسی جسم کا وزن بالکل صحیح طور پر معلوم ہو سکے تو ہمیں اس جسم کو خلا کے اندر تولنا چاہیئے۔ اگر ہم ایسا نہ کرینگے تو جواب میں خفیف سی غلطی واقع ہوگی کیونکہ بالعموم جسم کی ہٹائی ہوئی ہوا اور باٹوں کی ہٹائی ہوئی ہوا کے اوزان میں اختلاف ہوتا ہے، لیکن چونکہ جسم کے وزن کے مقابل میں ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن نہایت ہی

قلیل ہوتا ہے اس لئے یہ غلطی فی الحقیقت نہایت ہی خفیف ہوگی۔

اگر زیادہ صحت کی ضرورت ہو تو پہلے جسم کی اور باٹوں کی کثافتیں معلوم کرلینی چاہئیں اور پھر ظاہری وزن سے اصلی وزن معلوم کرنا چاہئے جیسا کہ ذیل کی دفعہ میں کیا گیا ہے۔

۶۳۔ ایک شے کی کثافت ک_1 ہے، اس کو ایسے باٹوں سے تولا گیا ہے جن کی کثافت کَ ہے، اگر ہوا کی کثافت ک_2 ہو تو جسم کے کسی ظاہری وزن کے جواب میں اس کا اصلی وزن دریافت کرو۔

فرض کرو کہ جسم کا اصلی وزن و ہے اور اس کا ظاہری وزن جو ترازو سے معلوم ہوتا ہے وَ ہے یعنی وَ باٹوں کے مجموعۂ اوزان کے مساوی ہے، اگر فرض کیا جائے کہ ترازو صحیح ہے تو دونوں پلڑوں کی رسیوں کے تناؤ برابر ہونگے یعنی

شے مذکور کا وزن ـ اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن

= باٹوں کا وزن ـ ان کی ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن

یعنی $\text{و} - \frac{\text{و}}{\text{ک}_1}\times\text{ک}_2 = \text{وَ} - \frac{\text{وَ}}{\text{کَ}}\times\text{ک}_2$ ...... (۱)

[کیونکہ دفعہ ۱۸ کی رُو سے شے کا حجم $= \frac{\text{و}}{\text{ک}_1\,\text{ج}}$ اور اس لئے اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن $= \frac{\text{و}}{\text{ک}_1}\times\text{ک}_2$

اس لئے باٹوں کا حجم $= \frac{\text{وَ}}{\text{کَ}\,\text{ج}}$ اور ان کی ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن $= \frac{\text{وَ}}{\text{کَ}}\times\text{ک}_2$]

$$\therefore \text{و} = \text{وَ}\ \frac{1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}}}{1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1}} \ldots\ldots (2)$$

پس ثابت ہوا کہ کسی جسم کا اصلی وزن معلوم کرنے کے لئے اس کے ظاہری وزن کو کسر $\frac{1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}}}{1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1}}$ سے ضرب دینا چاہیئے ۔

اب بالعموم ہوا کی کثافت شئے اور باٹوں کی کثافتوں کے مقابلہ میں بہت کم ہوتی ہے یعنی ک_2 بمقابلہ ک_1 اور کَ نہایت ہی کم ہے ۔

$$\text{اس لئے کسر} = \left(1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}}\right)\left(1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}}\right)\left(1 + \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} + \frac{\text{ک}_2^2}{\text{ک}_1^2} \text{ کی علیٰ قوتیں}\right)$$

بذریعہ مسئلہ ثنائی

$$= 1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}} + \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1}$$ ، اگر ک_2 کا مربع اور بڑی قوتیں نظرانداز کی جائیں ۔

پس کافی حد تک تقریبی قیمت حسب ذیل ہے

$$\text{و} = \text{وَ}\left[1 - \frac{\text{ک}_2}{\text{کَ}} + \frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1}\right]$$

۶۴ ۔ مشق ۔ ایک صحیح ترازو پانی کے اندر پوری غرق ہے ، اس ترازو کے ایک پلڑے میں کچھ شیشہ ہے جس کی کثافت اضافی ۲٫۵ ہے اور دوسرے پلڑے میں ایک پونڈ وزن کا باٹ ہے

اور یہ دونوں متوازن ہیں، اگر باٹ کی کثافت اضافی ۸ ہو تو شیشے کا اصلی وزن دریافت کرو۔

فرض کرو کہ شیشے کا اصلی وزن و پونڈ ہے، اسلئے شیشہ کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن $\frac{۱}{۲٫۵}$ و $= \frac{۲}{۵}$ و ہے۔

پس اُس پلڑے کی رسّی کا تناؤ جس میں شیشہ ہے $=$ و $- \frac{۲}{۵}$ و $= \frac{۳}{۵}$ و، اسی طرح سے ایک پونڈ باٹ کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن $= \frac{۱}{۸}$ پونڈ وزن

پس اُس پلڑے کی رسّی کا تناؤ جس میں باٹ ہے

$=$ ۱ پونڈ $- \frac{۱}{۸}$ پونڈ $= \frac{۷}{۸}$ پونڈ وزن

چونکہ ترازو کی ڈنڈی متوازی الافق ہے اس لئے ان رسیوں کے یہ تناؤ باہم مساوی ہیں، یعنی $\frac{۳}{۵}$ و $= \frac{۷}{۸}$

اس لئے و $= \frac{۳۵}{۲۴} = ۱\frac{۱۱}{۲۴}$ پونڈ وزن جو شیشہ کا اصلی وزن ہے

امثلہ نمبری ۱۲

۱۔ ایک جسم کا وزن ۱۸ پونڈ ہے اور اس کی کثافت اضافی ۳ ہے جسم کو ایک رسّی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے، اگر جسم کو (۱) پانی میں (۲) ایسے سیال میں جس کی کثافت اضافی ۲ ہے لٹکایا جائے تو ہر صورت میں رسّی کا تناؤ دریافت کرو۔

۲۔ ایک برتن میں پارہ کے اوپر کچھ پانی پڑا ہے، پارہ کی کثافت اضافی ۱۳ ہے، پلاٹنم کا ایک ٹکڑا جس کی کثافت اضافی ۲۱ ہے ایک رسّی کے ذریعہ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اس کے

حجم کا $\frac{۱۹}{۲۴}$ پارہ کے اندر ہے اور باقی پانی کے اندر، ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ پلاٹینم کے ٹکڑے کے نصف وزن کے برابر ہے۔

۳ - ترازو کی ڈنڈی کے ایک سرے سے سونے کا ایک ٹکڑا لٹکایا گیا ہے اور دوسرے سرے سے چاندی کا ایک ٹکڑا، سونے اور چاندی کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۱۹٫۳ اور ۱۰٫۵ ہیں، اگر سونے کو شورے کے تیزاب (کثافتِ اضافی ۱٫۵) اور چاندی کو الکحل (کثافت اضافی ۰٫۸۵) میں ڈبویا جائے تو ترازو کی ڈنڈی متوازی الافق ہوتی ہے، بتاؤ کہ دونوں ٹکڑوں کی کمیتوں کو آپس میں کیا نسبت ہے۔

۴ - لوہے کی کثافت اضافی ۷٫۶ ہے، معلوم کرو کہ اگر لوہے کے ایک ہنڈرڈ ویٹ کو پانی میں تولا جائے تو اس کا ظاہری وزن کیا ہوگا، نیز دریافت کرو کہ کتنے پونڈ لکڑی (کثافت اضافی ۲٫۶) اس لوہے کے ساتھ باندھی جائے کہ دونوں ملکر پانی میں تیرنے کے عین قابل ہوں۔

۵ - ایک ٹھوس جسم جس کا وزن ایک اونس ہے پانی کے ایک برتن کی تہ میں پڑا ہے، اگر برتن کی تہ پر جسم مذکور کا مجموعی دباؤ $\frac{۳۵}{۳۷}$ اونس ہو تو جسم کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۶ - ایک جسم کا حجم ۳۰ مکعب سنٹی میٹر ہے اور کثافت اضافی ۱٫۵ ہے، جسم مذکور کو ایک برتن میں رکھا گیا ہے اور برتن میں اتنا پانی ڈالا گیا ہے جو جسم کو ڈبو دینے کے لئے عین کافی ہے، برتن کی تہ پر جسم کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۷ - سونے چاندی کے ایک بھرت کو پانی کے اندر تولنے سے

اس کے وزن کا $\frac{1}{14}$ کم ہو جاتا ہے، سونے کی کثافت اضافی ۱۹،۲۵ ہے اور چاندی کی ۱۰،۵، بحرت میں دونوں دھاتوں کے حجموں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۸ - سیسے کا ایک ٹکڑا اور لکڑی کا ایک ٹکڑا ہوا میں تولنے سے باہم متوازن ہوتے ہیں معلوم کرو کہ ان میں سے کونسا دراصل زیادہ بھاری ہے اور کیوں۔

۹ - ایک جسم ا کی کمیت ایک دوسرے جسم ب کی کمیت سے دگنی ہے، لیکن پانی میں تولنے سے اُن کے ظاہری وزن باہم برابر ہیں، اگر ا کی کثافت اضافی $\frac{5}{4}$ ہو تو ب کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۰ - پانی کا ایک برتن ایک کمانیدار ترازو کے سرے سے انتصابی حالت میں لٹک رہا ہے، اگر ایک اور ترازو کے سرے سے کسی جسم کو لٹکا کر برتن کے اندر پانی میں ڈبویا جائے تو بتاؤ کہ ترازوؤں کی سوئیاں اوپر جائینگی یا نیچے۔

۱۱ - اسطوانہ کی شکل کا ایک برتن جس کے اندر پانی ہے ایک میز پر پڑا ہے، دھات کا ایک ٹکڑا جس کا حجم معلوم ہے ایک رسی کے ذریعہ پانی کے اندر ڈبویا گیا ہے، بتاؤ کہ پیندے پر کے دباؤ پر کیا اثر پڑیگا اگر (۱) برتن پانی سے بھرا ہوا ہو (۲) اگر پانی سے بھرا ہوا نہ ہو۔ دوسری صورت میں کتنی تبدیلی واقع ہوگی؟

۱۲ - لکڑی کا ایک ٹکڑا جسکا حجم ۳۶ مکعب انچ ہے پانی کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کا $\frac{2}{3}$ پانی کے اندر غرق ہے، اگر ایک دھات کی کثافتِ اضافی لکڑی کی کثافتِ اضافی کی

۸ گئی ہو تو بتاؤ کہ دہات کا کتنا حجم لکڑی کے نچلے حصہ سے باندھا جائے کہ لکڑی پانی کے اندر عین غرق ہو جائے، جب یہ حالت ہو تو معلوم کرو کہ راسی سمت میں کس قدر قوت لگائی جائے کہ یہ لکڑی اور دھات سے بنا ہوا جسم پانی کے اندر آدھا غرق رہے۔

۱۳۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ڈول کو جس کا ارتفاع ایک فٹ ہے اور قطر ۱۰ انچ، پانی سے آدھا بھرا گیا ہے، لوہے کے ایک ٹکڑے کو جس کا وزن ایک ہنڈرویٹ ہے ایک پتلے تار سے باندھ کر پانی کے اندر اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ وہ پورا پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے لیکن تہ سے نہیں چھوتا، بعدازاں تار کو نکال دیا گیا ہے اور لوہا تہ سے جا لگتا ہے۔ ہر دو حالتوں میں لوہے کی موجودگی سے تہ پر کے دباؤ میں جو اضافہ ہوتا ہے اس کو معلوم کرو۔ [لوہے کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۴۴۰ پونڈ ہے]

۱۴۔ اگر خلا اور پانی میں ایک جسم کے وزن بالترتیب و اور وَ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا وزن ہوا میں و ـ ض (و ـ وَ) ہوگا جہاں ض ہوا کی کثافت اضافی ہے۔

۱۵۔ ہوا کی کثافت اضافی ض ہے، ہوا اور پانی کے اندر ایک جسم کے وزن بالترتیب و اور وَ ہیں، ثابت کرو کہ خلا میں اس کا وزن

$$و + \frac{ض}{۱-ض}(و - وَ)$$ ہوگا۔

۱۶۔ تین سیالوں کی اضافی کثافتیں $ض_۱$، $ض_۲$، $ض_۳$ ہیں اور ان کے اندر ایک جسم کے ظاہری وزن بالترتیب $و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ ہیں، ثابت کرو کہ

$و_1(ض_2 - ض_3) \times و_2(ض_3 - ض_1) + و_3(ض_1 - ض_2) = ۰$

۱۷- ایک جسم تین متجانس الاجزا سیّالوں کے اندر تولا گیا ہے اور ان سیّالوں میں اس کے وزن بالترتیب $و_1$، $و_2$، $و_3$ ہوتے ہیں، ایک دوسرے جسم کو انہی تین سیالوں میں تولا گیا ہے اور اس کے وزن بالترتیب $وَ_1$، $وَ_2$، $وَ_3$ ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$و_1(وَ_2 - وَ_3) + و_2(وَ_3 - وَ_1) + و_3(وَ_1 - وَ_2) = ۰$$

۶۵- اگر ایک جسم کو ایک ایسے سیّال کے اندر ڈبویا جائے جس کی کثافت اضافی جسم مذکور کی کثافت اضافی سے زیادہ ہو تو جسم پر کا حاصل اتصالی دباؤ جسم کے وزن سے زیادہ ہوگا اور جسم اوپر کو اٹھیگا بشرطیکہ کوئی بیرونی قوت اس کو اوپر آنے سے نہ روکے۔

مشق ۱- لکڑی کے ایک ٹکڑے کا وزن ۱۲ پونڈ ہے اور اس کی کثافت اضافی $\frac{۳}{۴}$ ہے، اس کو ایک رسّی کے ذریعہ پانی کے ایک برتن کی تہ کے ساتھ اس طرح باندھا گیا ہے کہ یہ پورا ڈوبا رہتا ہے، رسّی کا تناؤ معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ}\quad \frac{\text{لکڑی کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن}}{\text{لکڑی کا وزن}} = \frac{\text{پانی کی کثافتِ اضافی}}{\text{لکڑی کی کثافت اضافی}}$$

$$= \frac{۱}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$

∴ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن $= \frac{۴}{۳} \times ۱۲$ پونڈ وزن $= ۱۶$ پونڈ وزن،

توازن کے لئے ضروری ہے کہ

رسّی کا تناؤ + لکڑی کا وزن = ہٹائے ہوئے پانی کا وزن
∴ رسّی کا تناؤ = ۱۶ - ۱۲ = ۴ پونڈ وزن
مشق ۲ - ایک غبارہ کی کمیت معہ اس کی گیس کے ۳۵۰۰ پونڈ ہے اور غبارہ ۴۸۰۰۰ مکعب فٹ ہے، اگر ہوا کی کمیت ۱٫۲۵ اونس فی مکعب فٹ ہو تو بتاؤ کہ غبارہ کس اسراع سے اوپر چڑھنا شروع کریگا۔
اُس ہوا کا وزن جسکو غبارہ ہٹاتا ہے = ۴۸۰۰۰ × ۱٫۲۵ اونس وزن
= ۳۷۵۰ پونڈ وزن
اس لئے وہ قوت جو غبارہ پر اوپر کی طرف عمل کرتی ہے = ہٹائی ہوئی ہوا کا وزن - غبارہ کا وزن = ۲۵۰ پونڈ وزن = ۲۵۰ ج پونڈل

∴ غبارہ کا ابتدائی اسراع = $\frac{\text{حرکت پیدا کرنے والی قوت}}{\text{حرکت کرنے والی کمیت}} = \frac{۲۵۰ ج}{۳۵۰۰} = \frac{ج}{۱۴}$

امثلہ نمبری ۱۳

۱- کاگ کے ایک ٹکڑے کا وزن ۳۰ گرام ہے، اس کو ایک ڈوری کے ذریعہ پانی کے ایک برتن کے اندر اسکے پیندے کے ساتھ اس طرح باندھ دیا گیا ہے کہ کاگ پانی کے اندر پورا ڈوبا رہتا ہے، اگر کاگ کی کثافت اضافی ۰٫۲۵ ہو تو ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔
۲- لکڑی کے ایک ٹکڑے کا وزن ۶ پونڈ ہے اور اس کی کثافت اضافی ۰٫۸ ہے، اس کو ایک رسّی کے ذریعہ جو ۲ پونڈ سے زیادہ تناؤ برداشت نہیں کرسکتی ایک برتن کے اندر اسکے پیندے کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے، برتن میں کچھ پانی ہے اور ٹکڑا پانی کے اندر پورا ڈوبا رہتا ہے،

باقی برتن کو ایسے مائع سے بھر دیا جاتا ہے جسکی کثافت اضافی ۱٫۲ ہے اور جو پانی سے مل جاتا ہے، ثابت کرو کہ اگر برتن کا دو تہائی سے کم حصہ پانی سے بھرا ہوا ہوگا تو رسی ٹوٹ جائے گی۔

۳ - لکڑی کا ایک اسطوانہ جسکا وزن ۱۵ پونڈ ہے اور طول ۳ فٹ پانی کے اندر اس طرح تیرتا ہے کہ یہ آدھا پانی کے اندر ڈوبا رہتا ہے جبکہ اسکا محور انتصابی ہو، بتاؤ کہ اس کو ۶ انچ اور ڈبو دینے کے لئے کتنی قوت درکار ہوگی؟

۴ - ہوا کے ایک لیٹر کا وزن ۱٫۲۹ گرام ہوتا ہے اور کول گیس کے ایک لیٹر کا ۰٫۵۲ گرام، اگر ایک غبارہ کے اندر ۴۰ لاکھ لیٹر کول گیس ہو اور غبارہ اور اسکے دیگر لوازمات کا مجموعی وزن ۱۵ لاکھ گرام ہو تو بتاؤ کہ غبارہ اور کتنا وزن ہوا میں سہار سکتا ہے۔

۵ - ایک غبارہ کو جس کے اندر ۱۰ مکعب فٹ ہائیڈروجن ہے ایک رسی کے ذریعہ اوپر چڑھنے سے روکا گیا ہے، اگر یہ تسلیم کیا جائے کہ ہوا کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱٫۲۵ اونس اور اس کی کثافت اضافی ہائیڈروجن کی کثافت اضافی کا ۱۴٫۶ گنا ہے تو رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۶ - ایک غبارے اور اس کے لوازمات کا مجموعی حجم ۴۰۰۰۰ مکعب فٹ ہے اور اس کی کمیت مع اس کی گیس کے ۲ ٹن ہے، اگر ہوا کے ایک مکعب فٹ کی کمیت ۱٫۲۴ اونس ہو تو دریافت کرو کہ غبارہ کس اسراع کے ساتھ اوپر چڑھنا شروع کریگا۔

۷ - ایک مثلثہ پترا ا ب ج جس کے اضلاع ا ب اور ا ج

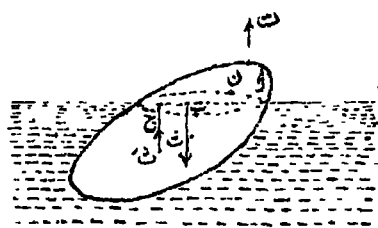
برابر ہیں پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ضلع ب ج افق پر عمود ہے اور اس ضلع کے طول کا $\frac{3}{4}$ پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے، پتر ے کو اس حالت میں ایک رسّی کے ذریعہ متوازن رکھا گیا ہے جس کا ایک سرا ا کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا برتن کے پیندے کے ساتھ، پترے کی کثافت اضافی معلوم کرو اور ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ پترے کے وزن کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

۶۶۔ ایک جسم کسی مائع کے اندر جزءً غرق ہے اور ایک رسّی جو اسکے کسی نقطہ کے ساتھ بندھی ہے اسکو سہارے ہوئے ہے، جسم کے توازن کی شرائط معلوم کرو۔

فرض کرو کہ جسم کے نقطہ ن کے ساتھ رسّی بندھی ہے اور اس کا تناؤ ت پونڈل ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا حجم ح ہے، اس کے حجم کی ایک اکائی کا وزن و ہے اور جسم کا مرکز ثقل ث ہے۔

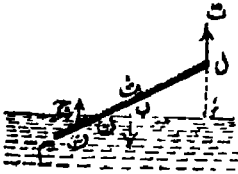
نیز فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے مائع کا حجم حَ ہے، اس کے حجم کی ایک اکائی کا وزن وَ ہے اور اس کا مرکز ثقل ثَ ہے۔ فرض کرو کہ ن، ث، ثَ میں سے گزرنیوالے انتصابی خطوط مائع کی سطح سے بالترتیب نقاط ا، ب، ج پر ملتے ہیں۔

تب جسم پر انتصابی سمت میں عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں۔

(۱) تناؤ ت جو ا میں سے اوپر کی سمت میں عمل کرتا ہے
(۲) جسم کا وزن ح و جو ب میں سے نیچے کی طرف عمل کرتا ہے اور
(۳) حاصل انتصابی دباؤ حَ وَ جو ج میں سے اوپر کی طرف عمل کرتا ہے (دفعہ ۴۹)۔

چونکہ یہ قوتیں متوازن ہیں اس لئے نقاط ا، ب، ج لازماً ایک ہی افقی خطِ مستقیم پر واقع ہوں گے اور نیز علم سکون دفعہ ۵۳ کے رو سے

ت + حَ وَ = ح و ---- (۱)

اور حَ وَ × اج = ح و × اب ..... (۲)

مشق۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ ا ہے اور یہ ایک رسی کے سہارے جو اس کے ایک سرے پر بندھی ہے پانی کے اندر متوازن حالت میں جزءً غرق ہے۔ اگر مائع کی کثافت سلاخ کی کثافت کا $\frac{4}{3}$ ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا نصف طول مائع کے باہر ہوگا۔ نیز ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سلاخ مذکور ل م ہے اور ن اس کا وہ نقطہ ہے جہاں یہ پانی کی سطح سے ملتی ہے، نیز م ن کا وسطی نقطہ شَ ہے اور سلاخ کا وسطی نقطہ ش ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ کے حجم کی ایک اکائی کا وزن و ہے اور مائع کے حجم کی ایک اکائی کا وزن $\frac{4}{3}$ و ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ کے غرق شدہ حصہ کا طول لا ہے اور اسکی عمودی تراش کا رقبہ ک ہے۔

تب سلاخ کا وزن $= \text{ک}_1 \times 2\,\text{ا}_1 \times \text{د}$

اور ہٹائے ہوئے مائع کا وزن $= \text{ک}_1 \times \text{لا} \times \frac{3}{4}\,\text{و}_1$

اگر رسّی کا تناؤ ت ہو تو توازن کی شرائط یہ ہیں

$\text{ت} + \text{ک}_1 \times \text{لا} \times \frac{3}{4}\,\text{و}_1 = 2\,\text{ا}_1 \times \text{ک}_1 \times \text{و}_1$ ....(۱)

اور $\text{ک}_1 \times \text{لا} \times \frac{3}{4}\,\text{و}_1 \times \text{اج} = 2\,\text{ا}_1 \times \text{ک}_1 \times \text{و}_1 \times \text{اب}$ ....(۲)

دوسری مساوات سے

$$\frac{2\,\text{لا}}{3\,\text{ا}_1} = \frac{\text{اب}}{\text{اج}} = \frac{\text{ل ث}}{\text{ل ث}'} = \frac{\text{ا}_1}{2\,\text{ا}_1 - \frac{1}{2}\,\text{لا}}$$

$\therefore \text{لا}^2 - 4\,\text{ا}_1\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_1^2 = 0$

لہذا $\text{لا} = \text{ا}_1$، مساوات بالا کا دوسرا حل (یعنی $\text{لا} = 3\,\text{ا}_1$) صریحاً ناقابل تسلیم ہے۔

پس ثابت ہوا کہ آدھی سلاخ ڈوبی ہوئی ہے۔

نیز لا کی یہ قیمت مساوات (۱) میں درج کرنے سے

$\text{ت} = \frac{2}{4}\,\text{ک}_1 \times \text{ا}_1 \times \text{و}_1 =$ سلاخ کے وزن کا $\frac{1}{4}$

امثلہ نمبری ۱۴

(۱) ۶ فٹ لمبی ایک یکساں سلاخ ایک نصاب کے گرد جو پانی کی سطح سے باہر ہے گھوم سکتی ہے، توازن کی حالت میں سلاخ کا ۴ فٹ طول ڈوبا ہوا ہے، ثابت کرو کہ اسکی کثافت اضافی $\frac{8}{9}$ ہے۔

(۲) ایک یکساں سلاخ دو انتصابی رسّیوں کے سہارے جو اس کے دونوں سروں پر بندھی ہیں اس طرح آویزاں ہے کہ اس کا نصف طول پانی کے

اندر غرق ہے، اگر اس کی کثافت اضافی ۲٫۵ ہو تو ثابت کرو کہ رسیوں کے جو تناؤ ہوں گے ان کی نسبت ۹ : ۷ ہو گی۔

(۳) ایک یکسان سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد جو پانی سے باہر ہے گھوم سکتی ہے، سلاخ ایسی حالت میں متوازن ہے کہ یہ انتصابی سمت کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہے اور اس کے طول کی ایک تہائی پانی کے اندر غرق ہے، ثابت کرو کہ اس کی کثافت اضافی $\frac{۵}{۹}$ ہے۔

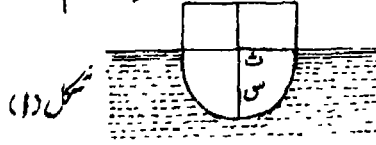
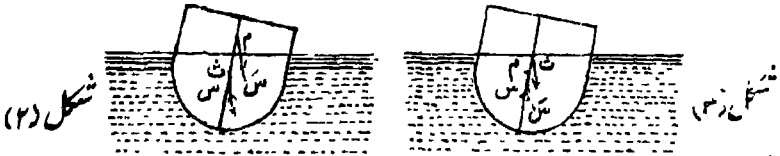
(۴) ایک سلاخ کا طول ۲ لِ ہے، سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد جو مائع کی سطح سے ارتفاع ف (< ۲ لِ) پر ثابت کردیا گیا ہے بلا تکلف گھوم سکتی ہے، اگر سلاخ اور مائع کی کثافتیں بالترتیب کَ اور کِ ہوں تو ثابت کرو کہ سلاخ بحالت توازن انتصابی سمت میں قائم رہ سکتی ہے یا ایسی سمت میں جو انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنائے جہاں

$$\text{جم طہ} = \frac{\text{ف}}{۲\,\text{لِ}}\sqrt{\frac{\text{کِ}}{\text{کِ} - \text{کَ}}}$$

توازن کا قیام

۶۷ - ہم بیشتر بتا چکے ہیں کہ جب ایک جسم پانی کے اندر تیر رہا ہو تو اس کا مرکز ثقل ث اور اس کے اچھال کا مرکز س دونوں ایک ہی انتصابی خط پر واقع ہوں گے۔ [دفعہ ۵۷] اگر جسم کو ذرا سا اس طرح گھما دیا جائے کہ س ث سمت انتصابی کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ بنائے تو ذیل کی دو صورتوں میں سے ایک صورت واقع ہو گی (۱) مائع کا مجموعی دباؤ جسم کو پھر

اصلی حالت میں لانے کی کوشش کرے گا، اگر ایسا ہو تو سمجھنا چاہئے کہ جسم مذکور کا توازن گھمانے سے پہلے **قائم** تھا۔

(۲) یا مائع کے مجموعی دباؤ کا میلان جسم مذکور کو حالت توازن سے اور دور ہٹانے کی طرف ہوگا، اس صورت میں سمجھنا چاہئے کہ جسم کا توازن گھمانے سے پہلے **غیر قائم** تھا۔

اشکال بالا میں یہ دونو صورتیں دکھائی گئی ہیں، شکل (۱) میں جسم کے توازن کی ابتدائی حالت دکھائی گئی ہے۔ اشکال (۲) اور (۳) میں خفیف سی زاوی حرکت کے بعد جسم مذکور کی مختلف حالتیں دکھائی گئی ہیں، دونو شکلوں میں سَ نیا اچھال کا مرکز ہے، سَ م انتصابی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ث س سے نقطہ م پر ملتا ہے۔

چونکہ شکل (۲) میں نقطہ م، ث سے اوپر واقع ہے اسلئے قوتوں کا میلان جسم کو سمت ساعت کے خلاف گھمانے کی طرف ہے اور جسم اپنی پہلی حالت میں آجائے گا، اس سے ثابت ہوا کہ جسم کا توازن حرکت دئے جانے سے پہلے **قائم** تھا۔

شکل (۳) میں چونکہ نقطہ م، ث سے **نیچے** ہے اس لئے

قوتوں کا میلان جسم کو سمت ساعت کے موافق گھمانے کی طرف ہے، لہذا جسم اپنی ابتدائی متوازن حالت سے اور دُور ہٹ جائے گا، اس سے ثابت ہوا کہ جسم کا توازن حرکت دئے جانے سے پہلے غیر قائم تھا۔

[اشکال بالا میں ہم نے تسلیم کرلیا ہے کہ سَ میں سے گزرنے والا انتصابی خط س ث سے ملتا ہے، متشاکل اجسام میں بالعموم ایسا ہی ہوتا ہے]

جو کچھ اوپر بیان ہوا اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توازن کا قیام اس امر پر موقوف ہے کہ م کا مقام بلحاظ ث کے کیا ہے، اس نقطہ م کی اہمیت کے لحاظ سے اس کو مرکز مابعد کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔ اس کی باضابطہ تعریف ذیل میں درج کی جاتی ہے

۶۸ – مرکز مابعد۔ تعریف۔ اگر ایک جسم پانی کے اندر بلا تکلف تیر رہا ہو اور اس کو ذرا سا اس طرح گھما دیا جائے کہ یہ مائع کی اُسی مقدار کو ہٹائے جس کو پہلے ہٹاتا تھا تو وہ نقطہ جہاں نئے اچھال کے مرکز میں سے گذرنے والا انتصابی خط، جسم کے مرکز ثقل اور ابتدائی اچھال کے مرکز کے خطِ وصل سے ملتا ہے مرکز مابعد کہلاتا ہے۔

اگر مرکز مابعد کا مقام جسم کے مرکز ثقل کے مقام سے اوپر ہو تو جسم کا توازن قائم ہوتا ہے اور برعکس اس کے اگر مرکز مابعد کا مقام جسم کے مرکزِ ثقل سے نیچے ہو تو توازن غیر قائم

ہوتا ہے۔
اس سے ظاہر ہے کہ ایک تیرنے والے جسم کو قائم توازن کی حالت میں رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ اس کے مرکز ثقل کو اتنا نیچے رکھا جائے جتنا کہ ممکن ہو' یہی وجہ ہے کہ جہازوں اور مائع پیما (دفعہ ۸۰) کے نچلے حصہ کو خاص طور پر بوجھل بنایا جاتا ہے۔
کسی ایک دی ہوی صورت میں مرکزِ مابعد کے مقام کا تعین ایک دقت طلب امر ہے' اس کے مقام کا انحصار بالخصوص برتن کی شکل پر ہوتا ہے۔

۶۹۔ اگر ایک جسم کا مائع سے مس کرنے والا حصہ کُروی شکل کا ہو تو ظاہر ہے کہ اس کروی حصہ کا مرکز ہی مرکزِ مابعد ہو گا کیونکہ کروی سطح کے ہر ایک نقطہ پر کا دباؤ سطح مذکور پر عمود وار ہو گا اور اس لئے مرکز میں سے گذرے گا۔
لہذا کل سطح پر کا مجموعی دباؤ ہمیشہ مرکز میں سے گزرے گا اس لئے ہندسی مرکز ہی مرکزِ مابعد ہو گا۔
اس خاص صورت میں خفیف زاوی حرکتوں کے واسطے جسم کا توازن قائم ہو گا اگر اس کا مرکزِ ثقل کروی حصہ کے مرکزِ ثقل سے نیچے ہو اور غیر قائم ہو گا اگر اس کا مرکزِ ثقل کروی حصہ کے مرکز ثقل سے اوپر ہو۔ (علم سکون دفعہ ۱۲۹ سے مقابلہ کرو)

امثلہ نمبری ۱۵

(۱) لکڑی کا ایک گیند پانی میں تیر رہا ہے' ثابت کرو کہ اگر کوئی چھوٹے

سے چھوٹا وزن اس کے سب سے اونچے نقطہ پر رکھا جائے تو اس کا توازن غیر قائم ہو جائے گا۔

۲۔ ایک نصف کرہ اور ایک قائم مخروط کے مستوی رخ برابر ہیں ان مساوی رخوں کو جوڑنے سے ایک جسم بنایا گیا ہے، یہ جسم پانی کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اسکی کروی سطح کا کچھ حصہ پانی کے اندر غرق ہے، ثابت کرو کہ جسم کے توازن کو قائم رکھنے کے لئے مخروط کا ارتفاع قاعدہ کے نصف قطر کا زیادہ سے زیادہ ۳√ گنا ہو سکتا ہے۔

(۳) دھات کے نصف کرے اور ایک مخروط کے برابر مستوی قاعدوں کو جوڑنے سے ایک مجوف پیپرکوا بنایا گیا ہے، دھات کی موٹائی ہر جگہ یکساں ہے، اس کو اس طرح تیرانا منظور ہے کہ مخروط اوپر کی طرف رہے، ثابت کرو کہ اگر مخروط کا نصف راسی زاویہ ۴۵° ہو تو توازن قائم ہوگا اور اگر ۳۰° ہو تو غیر قائم۔

(۴) ایک اسطوانہ اور ایک نصف کرّے کے برابر مستوی قاعدوں کو جوڑنے سے ایک جسم بنایا گیا ہے جو پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کی کرّوی سطح کا کچھ حصہ پانی کے اندر غرق ہے، اگر (۱) جسم مذکور ٹھوس اور متجانس الاجزا ہو

(۲) جسم مذکور مجوف ہو اور اس کے خول کی موٹائی یکسان ہو تو اسطوانہ کا بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس سے توازن قائم رہ سکتا ہے۔

۷۰ – باب ہذا کے مضمون پر چند مشکل مشقیں ذیل میں

حل کی جاتی ہیں۔

مشق ۱۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ڈول جس میں کچھ پانی ہے ایک رسّی کے ذریعہ جو ایک چرخی پر سے گذرتی ہے م کمیت کے ایک جسم کو سہارے ہوئے ہے، ایک کاگ کا ٹکڑا جس کی کثافت اضافی ک ہے اور کمیت م۱ ڈول کے پیندے کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ اس طرح باندھ دیا گیا ہے کہ کاگ پورے کا پورا پانی کے اندر ڈوبا رہتا ہے، ثابت کرو کہ اس رسی کا تناؤ جو کاگ کے ساتھ بندھی ہے

$$\frac{۲ م م_۱ ج}{۲ م + م_۱} \left(\frac{۱}{ک} - ۱ \right) \text{ ہے۔}$$

فرض کرو کہ ڈول اسراع س کے ساتھ اترنا شروع کرتا ہے

$$\text{تب } س = \frac{م_۱ ج}{۲ م + م_۱} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (۱)$$

(علم حرکت دفعہ ۴۷)

فرض کرو کہ اثنائے حرکت میں رسّی کا تناؤ ت ہے اور مائع کا حاصل انتصابی دباؤ جو کاگ پر عمل کرتا ہے د ہے

$$\therefore م_۱ س = م_۱ ج + ت - د \quad \cdots\cdots\cdots \quad (۲)$$

اب اگر کاگ کو نکال دیا جائے اور اس کی جگہ پانی کا ایک مساوی حجم $\frac{م_۱}{ک}$ رکھ دیا جائے تو مجموعی دباؤ د اور $\frac{م_۱}{ک}$ کا وزن دونوں ملکر اس میں اسراع س پیدا کرینگے۔

$$\therefore \frac{م_۱}{ک} س = \frac{م_۱}{ک} ج - د \quad \cdots\cdots\cdots \quad (۳)$$

(۳) کو (۲) میں سے تفریق کرنے سے

$$م_۱ س \left(۱ - \frac{۱}{ک}\right) = ت + م_۱ ج \left(۱ - \frac{۱}{ک}\right)$$

$$\therefore ت = م_۱ (ج - س) \left(\frac{۱}{ک} - ۱\right) = \frac{م_۲ م_۱ ج}{م_۱ + م_۲} \left(\frac{۱}{ک} - ۱\right)$$

مشق ۲۔ مثال ماقبل میں ثابت کرو کہ ڈول کی منحنی سطح کے سب سے نچلے نقطہ پر کا دباؤ ابتدائی دباؤ سے زیادہ ہوگا اگر کاگ اور پانی کے حجموں کی باہمی نسبت $\frac{م_۱}{م_۲}$: ۱ سے بڑی ہو اور کم ہوگا اگر یہ نسبت $\frac{م_۱}{م_۲}$: ۱ سے کم ہو۔

فرض کرو کہ ابتدا میں پانی کی گہرائی $گ_۱$ تھی اور بعد میں گ ہوگئی۔ نیز فرض کرو کہ ڈول کا نصف قطر ا ہے اور کاگ اور پانی کے حجم بالترتیب $ح_۱$ اور ح ہیں، یعنی $ح = \pi ا^۲ گ_۱$

تب $\pi ا^۲ \times گ = ح_۱ + ح$

پس $گ : گ_۱ :: ح_۱ + ح : ح$

منحنی سطح کے سب سے نچلے نقطے پر حرکت سے پہلے جو دباؤ تھا وہ $= و_۱ \times گ_۱$، اور دورانِ حرکت میں جو دباؤ ہے وہ

$$= و_۱ گ \left(۱ - \frac{س}{ج}\right) \cdots\cdots \text{(علم حرکت دفعہ ۸۰)}$$

$$= و_۱ گ_۱ \times \frac{ح_۱ + ح}{ح} \left[۱ - \frac{م_۱}{م_۱ + م_۲}\right]$$

$$= و_1 گ \times \frac{ح_1 + ح}{ح} \times \frac{۲م}{۲م + م_1}$$

یہ رقم و₁ گ سے بڑی ہو گی اگر

$$\frac{ح_1 + ح}{ح} \times \frac{۲م}{۲م + م_1} > ۱$$

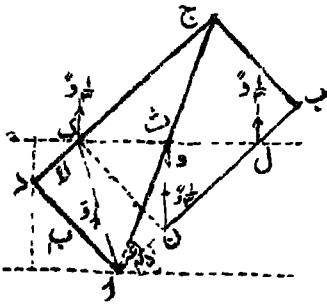
یعنی اگر $(ح_1 + ح) \times ۲م > (۲م + م_1)\, ح$

یعنی اگر $۲م\, ح_1 > م_1\, ح$

یعنی اگر $\frac{ح_1}{ح} > \frac{م_1}{۲م}$

مشق ۳ ۔ ایک مستطیل اپنے ایک راس کے گرد جس کو ایک مائع کی سطح کے نیچے ثابت کردیا گیا ہے حرکت سکتا ہے، مستطیل مائع کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اسکے اضلاع انتصابی خط کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں اور اس کا نصف رقبہ مائع کے اندر ڈوبا ہوا ہے، اگر مستطیل کے اضلاع کے طول بالترتیب ا اور ب ہوں اور ضلع ب مائع کے اندر پورا غرق ہو تو ثابت کرو کہ مستطیل کی کثافت کو پانی کی کثافت کے ساتھ

نسبت ا ۔ ب : ۴ ا ہو گی

چونکہ آدھا مستطیل مائع کی سطح کے نیچے ہے اس لئے مائع کی سطح ک ل مستطیل کے مرکز ثقل

ث میں سے گزرتی ہے۔
د ک کو لا کے مساوی فرض کرو اور ا ب پر عمود ک ن کھینچو۔
چونکہ ن ک اور ن ل افق کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں
اس لئے ن ل = ن ک = ب_1

$$\therefore \tfrac{1}{2}\,\text{ا}\,\text{ب}_1 = \text{مستطیل ا ک} + \triangle\,\text{ک ن ل} = \text{لا} \times \text{ب}_1 + \tfrac{1}{2}\,\text{ب}_1^2$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ا} - \text{ب}_1}{2} \quad \text{اور} \quad \text{ا ل} = \frac{\text{ا} + \text{ب}_1}{2}$$

فرض کرو کہ مستطیل اور مائع کی کثافتیں بالترتیب ک_1 اور ک_2 ہیں۔
تب مستطیل کا وزن و = ا ب ک_1 اور یہ مستطیل کے مرکز ثقل ث میں نیچے کی طرف عمل کرتا ہے۔
نیز مائع کا حاصل انتصابی دباؤ دو دباؤں کے مساوی ہے۔ اولاً وہ دباؤ جو مائع ا ن ک د کے وزن کے مساوی ہے اور ا ک کے وسطی نقطہ میں سے سمت راس میں عمل کرتا ہے اور ثانیاً وہ دباؤ جو مائع ن ک ل کے وزن کے مساوی ہے اور اس کے مرکز ثقل میں سے اوپر کی طرف عمل کرتا ہے۔
مائع ا ن ک د کا وزن $\text{وَ} = \text{ب}_1\,\text{لا} \times \text{ک}_2 = \tfrac{1}{2}\,\text{ب}\,(\text{ا} - \text{ب}_1)\,\text{ک}_2$
مائع ک ن ل کا وزن $\text{وً} = \tfrac{1}{2}\,\text{ک ن} \times \text{ن ل} \times \text{ک}_2 = \tfrac{1}{2}\,\text{ب}_1^2\,\text{ک}_2$
نیز بموجب علم سکون دفعہ ۱۰۴، مثلث ک ن ل کے مرکز ثقل پر جو دباؤ وً عمل کرتا ہے وہ ہر لحاظ سے تین برابر اوزان $\frac{\text{وً}}{3}$ کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے جب کہ یہ تینوں وزن مثلث کے راسوں پر اسی

سمت میں عمل کریں دیکھو شکل -

ا کے گرد معیار اثر لینے سے

و × ۱/۲ اج جم (عہ + ۴۵°)

= وً/۳ [لا جم ۴۵° + ال جم ۴۵° - (ب۱ - لا) جم ۴۵°] - وَ × ۱/۲ (ب۱ - لا) جم ۴۵°

جہاں عہ = ∠ ب ا ج

∴ و/۲ × اج (جم عہ - جب عہ) = وً/۳ [لا + (ا۱ + ب۱)/۲ - ب۱ + لا]
- ۱/۲ وَ (ب۱ - لا)

∴ و (ا۱ - ب۱) = وً/۳ [۴ لا + ا۱ - ب۱] - وَ (ب۱ - لا)

یعنی ا۱ ب۱ ک۱ (ا۱ - ب۱) = ب۱² ک۲/۲ × ۳ (ا۱ - ب۱)
- ۱/۲ ب۱ (ا۱ - ب۱) ک۲ × (۳ ب۱ - ا۱)/۲

∴ ا۱ ک۱ = ب۱ ک۲/۲ - ک۲ (۳ ب۱ - ا۱)/۴

∴ ک۱ = (ا۱ - ب۱)/۴ ا۱ × ک۲

نوٹ - مثلث کے وزن کی بجائے اس کے تینوں زاویوں میں سے ہر ایک پر کل وزن کی ایک تہائی کے برابر اوزان فرض کر لینے کی جو حکمت عملی اوپر اختیار کی گئی ہے بالعموم سکونِ سیّالات کے سوالات میں مفید ثابت ہوتی ہے۔

متفرق مثالیں نمبری ۱۶

۱- ایک متجانس الاجزا نصف کرہ جس کا وزن و ہے ایک مائع کے اندر

تیر رہا ہے، اگر اس کے کنارے پر ایک وزن وَ رکھ دیا جائے اور کنارہ نہ ڈوبے تو ثابت کرو کہ اُسکا قاعدہ زاویہ $مس^{-1} \frac{ش وَ}{۳ و}$ میں سے گھوم جائیگا

۲ ایک پتلا مجوف مخروط مع قاعدہ ایسا ہے کہ اس کو پانی کے اندر پورا ڈبوکر جہاں چھوڑا جائے وہیں تیرتا رہتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا راسی زاویہ $۲ جب^{-1} \frac{۱}{۲}$ ہے۔

۳۔ لکڑی کے دو متوازی السطوح جن کے وزن بالترتیب ۱۰۰ پونڈ اور ۵۰ پونڈ ہیں پانی میں تیر رہے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کی کثافت اضافی $\frac{۱}{۲}$ ہے، ان جسموں کی بالائی سطحوں کے وسطی نقاط پر لوہے کی ایک ایک کیل لگی ہوئی ہے جن پر ایک ۱۰۰ پونڈ وزنی سلاخ دھری ہے، اگر سلاخ کے مرکز ثقل کا فاصلہ بڑے ٹکڑے کی کیل سے سلاخ کے طول کا ایک چوتھائی ہو تو بتاؤ کہ لکڑی کا ہر ایک ٹکڑا پانی کی سطح سے کتنا باہر رہے گا۔

۴۔ ایک منشور کا وزن و ہے اور کثافت اضافی $\frac{۱}{۲}$، اس کی عمودی تراش ایک قائم الزاویہ مساوی الساقین مثلث ہے، منشور پانی کے اندر اس طرح متوازن ہے کہ اس کا زاویہ قائمہ والا کنارہ پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے اور اس کے باقی متوازی کناروں میں سے ایک پانی کی سطح میں ہے اور دوسرا سطح کے باہر، موخر الذکر کنارے دو انتصابی چکنی سطحوں کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ منشور کی بالا ترین سطح اور سطح آب کے درمیان زاویہ $مس^{-1} \frac{۱}{۳}$ بنتا ہے۔

۵۔ ایک متجانس الاجزا منشور جس کی تراش مثلث ا ب ج ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا کنارہ ج پانی کے اندر غرق ہے، ثابت

کرو کہ اس کی کثافت اضافی

$$\frac{\text{جب ا جم ب}}{\text{جب ج}} \quad \text{ہے یا} \quad \frac{\text{جب ب جم ا}}{\text{جب ج}}$$

۶ - ایک پتلے یکساں خول کی شکل ایک قائم مستدیر مخروط کی ہے جس کا راسی زاویہ ۶۰° ہے اور جس کا قاعدہ نہیں ہے - یہ خول پانی کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا کچھ حصہ پانی کے اندر ڈوبا ہوا ہے، اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور مستدیر قاعدہ کا سب سے نچلا نقطہ عین پانی کی سطح میں ہے، ثابت کرو کہ وہ خط جو راس کو اس نقطہ کے ساتھ وصل کرتا ہے افق کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{5}$ بناتا ہے -

[اس صورت میں پانی کی سطح مخروط کو جس منحنی پر قطع کرتی ہے اس کو قطع ناقص کہتے ہیں، اس منحنی کا مرکزِ ثقل اس کا وسطی نقطہ ہے اور ہٹائے ہوئے پانی کا مرکزِ ثقل اِس نقطہ اور مخروط کے راس کے خطِ وصل کو نسبت ۱ : ۳ میں تقسیم کرتا ہے]

۷ - ایک وزنی نِصف کروی پیالہ میں کچھ پانی ہے، پیالہ کا نصف قطر ا ہے اور یہ ایک ایسی کھردری سطح مائل پر بحالت سکون پڑا ہے جسکا زاویۂ میلان عہ ہے، ثابت کرو کہ پیالہ کے وزن کو پانی کے وزن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ

$$\frac{\text{۲ جبا عہ}}{\text{جب فہ - ۲ جب عہ}}$$

سے کم نہیں ہو سکتی جہاں π ا² جم² فہ پانی کی سطح کا رقبہ ہے -

۸- ایک ڈول کو جو آدھا پانی سے بھرا ہوا ہے ایک رسّی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے جو ایک چرخی کے اوپر سے گزرتی ہے ، چرخی اتنی چھوٹی ہے کہ رسّی کا دوسرا سرا اس پر سے ہو کر ڈول کے اندر گرتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک گولہ بندھا ہے جس کی کثافتِ اضافی ک ($ک > ۲$) ہے ، اگر گولہ ڈول کے پیندے کو مس نہ کرے اور اس کے ڈوبنے سے پانی ڈول سے باہر نہ نکل جائے تو ثابت کرو کہ توازن اس صورت میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ گولے کا وزن و اور $\frac{ک}{ک-۲}$ و کے درمیان ہو جہاں و سے مراد ڈول اور پانی کا مجموعی وزن ہے ۔

۹- دو ڈولوں میں پانی ہے ، ہر ایک ڈول کی کمیت مع اس کے پانی کے م ہے یہ دونو ڈول ایک چکنی چرخی پر متوازن ہیں ، اب لکڑی کے دو ٹکڑے جن کی کمیتیں بالترتیب $م_۱$ اور $م_۲$ ہیں اور جن کی اضافی کثافتیں بالترتیب $ک_۱$ اور $ک_۲$ ہیں الگ الگ دونو ڈولوں کے پیندوں کے ساتھ اس طرح باندھ دئے گئے ہیں کہ یہ پورے کے پورے پانی کے اندر ڈوبے رہتے ہیں ، ثابت کرو کہ اُس رسی کا تناؤ جو $م_۱$ کے ساتھ بندھی ہے

$$\frac{۲م_۱(م+م_۲)}{م+م_۱+م_۲}\, ج \left(\frac{۱}{ک_۱}-۱\right)$$

۱۰- ایک اسطوانہ جس کا ارتفاع ف ہے اور کثافت ک ، ایک مائع کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور افق پر عمود ہے ، مائع کی کثافت ک' ہے ، اب اگر ہوا کی کثافت $ک_۱$ سے $ک_۲$ ہو جائے تو دریافت

کرو کہ اسطوانہ اور کتنا ڈوب جائے گا یا اور کتنا اوپر اٹھ آئے گا۔

۱۱۔ ایک سلاخ انتصابی حالت میں ایک متجانس الاجزا مائع کے اندر اس طرح تیر رہی ہے کہ اِس کا کچھ حصہ مائع کے اندر غرق ہے، ثابت کرو کہ کرۂ ہوائی کی کثافت میں خفیف سا اضافہ واقع ہونے سے سلاخ کا جو مزید طول مائع کی سطح سے اوپر اٹھ آئے گا وہ اس طول کے مربع کے متناسب ہوگا جو غرق نہیں ہے۔

۱۲۔ کاگ کا ایک ٹکڑا جسکی شکل ایک اسطوانے کی ہے اور جسکی بلندی ف ہے پانی کے ایک برتن کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور افق پر عمود ہے، اگر برتن کو ایک ہوا پمپ کے قابلہ کے اندر رکھ کر ہوا خارج کی جائے تو ثابت کرو کہ کاگ کا $\frac{ک}{ا-ک}(ا-ض)ف$ طول اور ڈوب جائے گا جہاں ک اور ض بالترتیب ہوا اور کاگ کی اضافی کثافتیں ہیں۔

۱۳۔ ایک جسم پانی کے اندر تیر رہا ہے، اگر ہوا کی کثافتیں بالترتیب $ک_1$، $ک_2$ اور $ک_3$ ہوں تو جسم کے جو حجم پانی کی سطح سے اوپر رہتے ہیں وہ بالترتیب $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$ ہیں، ثابت کرو کہ

$$\frac{ک_2 - ک_3}{ح_1} + \frac{ک_3 - ک_1}{ح_2} + \frac{ک_1 - ک_2}{ح_3} = ۰$$

۱۴۔ دو دھاتوں ا اور ب کی اضافی کثافتیں بالترتیب $ک_1$ اور $ک_2$ ہیں، ان کو ملانے سے ایک بھرت تیار کیا گیا ہے جس کا وزن ہوا میں $ا_1$ اونس اور پانی میں $ب_1$ اونس ہے، ثابت کرو کہ بھرت میں ا اور ب کے حجموں کو نسبت $ک_2(ا_1 - ب_1) - ا_1 : ا_1 - ک_1(ا_1 - ب_1)$

ہے۔

۱۵ ایک جسم کی کثافت ک ہے اور ہوا کی کثافت $ک_۱$، جسم کو ایسے باٹوں سے تولا گیا ہے جن کی کثافت کَ (> ک) ہے، اگر ہوا کی کثافت $ک_۱$ سے بڑھ کر $ک_۲$ ہو جائے اور جسم کو پھر تولا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے وزن میں جو کمی واقع ہو گی وہ پہلے وزن کے $\frac{(کَ - ک)(ک_۲ - ک_۱)}{(ک - ک_۱)(کَ - ک_۲)}$ کے مساوی ہو گی۔

۱۶۔ اگر ہوا کی کثافت اضافی ۰۰۱۲۵ء۰ فرض کی جائے اور پیتل کے چند باٹوں کی ۸٫۴ تو ثابت کرو کہ پانی کی کچھ مقدار کو ان باٹوں کے ذریعہ تولنے سے پانی کا جو ظاہری وزن حاصل ہو گا اس میں بحساب تقریباً ۱ء فیصد کی تصحیح کرنے کی ضرورت ہو گی۔

۱۷ ا، ب، ج تین ہموزن گیند ہیں، ا اکیلا ب اور ج کا موازنہ کرتا ہے جبکہ تینوں کو $ک_۱$ کثافت والے ایک مائع میں لٹکایا جائے، اسی طرح سے ب اکیلا $ک_۲$ کثافت کے ایک مائع میں ا اور ج کا موازنہ کرتا ہے اور ج اکیلا $ک_۳$ کثافت کے ایک مائع میں ا اور ب کا۔ ا، ب، ج تینوں کی اضافی کثافتیں معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک مثلث پترے ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہے، پترا ایک مائع میں جس کی کثافت پترے کی کثافت کا $\frac{۵}{۳}$ ہے تیر رہا ہے جبکہ اس کا راس ج مائع کی سطح کے نیچے ایک قبضہ کے ذریعہ

ثابت کیا ہوا ہے ، اس کا ضلع ا ب پورا مائع کی سطح سے باہر رہتا ہے، اگر ا ج افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بنائے اور مائع کی سطح ب ج کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ضلع ا ج کی نسبت ضلع ب ج کے ساتھ ۲ : $\sqrt{3}$ کے مساوی ہے۔

۱۹- ایک مستطیل پترا جس کے اضلاع کی نسبت $\sqrt{3}$: ۱ ہے اپنے ایک چھوٹے ضلع کے وسطی نقطہ کے گرد بلا تکلف گھوم سکتا ہے اور اس کا یہ نقطہ مائع کی سطح کے نیچے ثابت کردیا گیا ہے۔ پترے کی سطح افق پر عمود ہے اور اس کا ایک قطر مائع کی سطح میں ہے، پترے اور مائع کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ اس ثابت نقطہ پر کا دباؤ پترے کے وزن کا $\frac{1}{2}$ ہے۔

۲۰- ایک یکساں مربع پترے ا ب ج د کا ہر ایک ضلع ۵ انچ ہے، اس کا ایک کونہ ا پانی کی سطح سے ۴ انچ نیچے ایک قبضہ کے ذریعہ ثابت کردیا گیا ہے اور پترا ایک انتصابی سطح مستوی میں بلا تکلف حرکت کر سکتا ہے، اگر پترا متوازن ہو جبکہ اسکا کونہ ب عین پانی کی سطح میں ہو اور ضلع ج د کا کچھ حصہ پانی کے اندر غرق ہو تو پترے کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۲۱- ایک مستطیل اپنے ایک نقطۂ راس کے گرد بلا تکلف حرکت کرسکتا ہے یہ نقطہ ایک مائع کی سطح کے باہر ثابت کردیا گیا ہے۔ مستطیل بحالت توازن اس طرح ساکن ہے کہ

اس کا نصف رقبہ مائع کے اندر غرق ہے اور اس کے اضلاع انتصابی سمت کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں، ثابت کرو کہ مستطیل کی کثافت کی نسبت مائع کی کثافت سے ۳ ب۱ + ا۱ : ۴ ب۱ ہے جہاں ا۱ اور ب۱ مستطیل کے اضلاع ہیں اور ا۱ < ب۱،

۲۲- ایک یکسان مستطیل پترے ا ب ج د کی کثافت اضافی ک ہے اور اس کا ایک کونہ ا پانی کی سطح کے نیچے گہرائی ج۱ پر ثابت کردیا گیا ہے، کونے ب اور ج سطح کے اوپر ہیں اور کونہ د نیچے، پترا ا کے گرد بلا تکلف گھوم سکتا ہے۔ اگر ا ب = ۲ ب۱، ا د = ۲ ا۱ اور ا ب مائع کی سطح سے زاویہ طہ بنائے جب کہ پترا متوازن ہو تو طہ معلوم کرنے کی مساوات دریافت کرو۔

۲۳- ایک مربع پترا جس کی کثافت ک۱ ہے پانی میں اسطرح تیر رہا ہے کہ اس کی سطح افق پر عمود ہے اور اس کا ایک راس پانی کی سطح سے نیچے ہے، پانی کی کثافت ک۲ ہے، اگر ۹ ک۲ > ۳۲ ک۱ تو ثابت کرو کہ توازن کی تین حالتیں ہیں اور ان میں سے دو حالتوں میں کوئی قطر انتصابی نہیں ہے۔

۲۴- ایک ٹھوس نصف کرہ جو اپنی مستوی سطح کے ایک ثابت افقی قطر کے گرد بلا تکلف گردش کر سکتا ہے ایک ثابت نصف کروی پیالہ میں خوب پھنس کر آتا ہے۔ پیالہ کی مستوی سطح متوازی الافق ہے اور اُس کا مرکز ٹھوس نصف کرہ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے، اگر نصف کرہ کسی زاویہ میں سے گھمایا جائے اور تب پیالہ کو ایک

ایسے مائع سے بھرا جائے جس کی کثافت اضافی ٹھوس کی کثافت اضافی سے دگنی ہو تو ثابت کرو کہ ٹھوس نصف کرہ ہمیشہ توازن کی حالت میں رہے گا۔

۲۵۔ایک ٹھوس اسطوانہ ایک بھاری زنجیر کے ذریعہ انتصاباً لٹک رہا ہے اور اس کا کچھ حصہ پانی کے ایک بڑے برتن میں ڈوبا ہوا ہے، زنجیر ایک چکنی چرخی کے اوپر سے گزرتی ہے اور اسکے آزاد سرے والے حصے کا وزن نظام میں توازن پیدا کرتا ہے، اگر اسطوانہ کا قطر مناسب طول کا لیا جائے تو ثابت کرو کہ اسطوانہ کا توازن تعدیلی ہوگا یعنی یہ نظام متوازن رہے گا خواہ اسطوانہ کا کوئی طول پانی میں غرق ہو۔

۲۶۔ایک کرے کے اوپر ایک نصف کروی پیالہ ساکن ہے، کرّے کا نصف قطر پیالہ کے نصف قطر سے دو چند ہے، اگر پیالہ میں آہستہ آہستہ پانی ڈالا جائے تو ثابت کرو کہ قائم توازن اس وقت تک بحال رہے گا جب تک کہ پانی کا وزن پیالہ کے وزن کا نصف نہ ہو جائے۔

باب ششم

اجسام کی اضافی کثافتیں دریافت کرنے کے طریقے

۱۷ ۔ اس باب میں ہم مختلف اشیا کی اضافی کثافتیں معلوم کرنے کے طریقوں پر بحث کرینگے۔

کسی شے کی کثافتِ اضافی بلحاظ پانی کے وہ نسبت ہے جو اس شے کے وزن کو اس کے مساوی الحجم پانی کے وزن کے ساتھ ہو۔

کثافت اضافی دریافت کرنے کے مشہور طریقے آلات مندرجہ ذیل کے استعمال پر مبنی ہیں

(۱) کثافت اضافی معلوم کرنے کی بوتل

(۲) آبی میزان

(۳) مائع پیما

(۴) لائنانلی

ان چاروں طریقوں پر ہم بالترتیب بحث کرینگے۔

۲ ۷ ۔ کثافت اضافی کی بوتل ۔ یہ ایک معمولی بوتل ہوتی ہے جس کے اندر مائع کی ایک معلوم مقدار آ سکتی ہے، یہ بوتلیں دو طرح کی ہوتی ہیں، پہلی قسم میں بوتل کا منہ کھلا ہوتا ہے اور اس کی گردن پر ایک نشان لگا ہوا ہوتا ہے، بوتل کو

ہمیشہ ٹھیک اس نشان تک بھرا جاتا ہے، دوسری قسم کی بوتل میں
اس کے منہ پر ایک شیشے کی ایک پھنس کر آنے والی ڈاٹ ہوتی
ہے جس کے اندر ایک باریک سوراخ ہوتا ہے، جب بوتل کو مائع
سے بھر کر ڈاٹ اچھی طرح لگائی جاتی ہے تو زائد مائع اُس چھوٹے
سوراخ کے راستہ پچک کر باہر نکل جاتا ہے۔

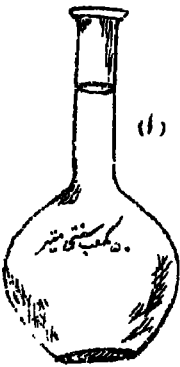
(۱) کسی مائع مفروضہ کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ خالی بوتل کا وزن (مع ڈاٹ) جبکہ اس کے اندر کی ہوا خارج کر دی گئی ہے
وَ ہے جب اسکو پانی سے بھر دیا جاتا ہے اور ڈاٹ لگادی جاتی ہے
تو فرض کرو کہ وزن وَ۱ ہوتا ہے
جب اس کو مائع زیر بحث سے
بھرا جاتا ہے تو فرض کرو کہ
اس کا وزن وَ۲ ہوتا ہے۔
تب وَ۱ - وَ = اتنے پانی کا
وزن جو بوتل کو عین بھر دیتا ہے
اور وَ۲ - وَ = اتنے مائع کا
وزن جو بوتل کو عین بھر دیتا ہے۔ چونکہ مائع اور پانی کے مساوی
حجموں کے اوزان بالترتیب وَ۲ - وَ اور وَ۱ - وَ ہیں اس لئے
دفعہ ۱۹ کے بموجب

(۱) ۵۰ مکعب سنٹی میٹر

(۲) ۱۵ سنٹی گریڈ تپش پر ۵۰ گرام

مائع کی کثافتِ اضافی = $\frac{\text{وَ}_2 - \text{وَ}}{\text{وَ}_1 - \text{وَ}}$

(۲) ایک ایسے ٹھوس جسم کی کثافتِ اضافی معلوم کرو جو پانی میں حل نہیں ہوتا
جسم کو توڑ کر اسکے چھوٹے چھوٹے ٹکڑے کرو جو باآسانی

بوتل کے اندر جا سکیں اور فرض کرو کہ ان ٹکڑوں کا مجموعی وزن و ہے، ٹکڑوں کو بوتل کے اندر ڈالو، پھر بوتل کو پانی سے بھر کر اوپر سے ڈاٹ لگا دو اور بوتل کو تولو، فرض کرو کہ یہ وزن وً ہے، نیز فرض کرو کہ جب بوتل صرف پانی سے بھری ہوئی ہو تو اس کا وزن وَ ہوتا ہے۔

تب و + وَ = کل جسم کا وزن + پانی سے بھری ہوئی بوتل کا وزن

اور وً = کل جسم کا وزن + پانی سے بھری ہوئی بوتل کا وزن
-جسم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

لہٰذا عمل تفریق سے

و + وَ - وً = ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

اسلئے و اور و + وَ - وً بالترتیب جسم اور پانی کے مساوی حجموں کے وزن ہیں۔

پس مطلوبہ کثافت اضافی = $\frac{\text{و}}{\text{و} + \text{وَ} - \text{وً}}$

طریقہ متذکرہ بالا پر عمل کرتے وقت چند امور کا لحاظ رکھنا چاہیئے اور اُن کے مطابق نتائج محصلہ میں تصحیح کرنی چاہیئے (۱) پانی کسی خاص تپش پر ہونا چاہیے بلحاظ سہولت ۱۶° سنٹی گریڈ پر مناسب ہوگا۔

(۲) در اصل تولنے کا عمل خلا میں کرنا چاہیئے، کیونکہ جیسا دفعہ ۶۲ میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر ہوا کی ان مقداروں میں جن کو باٹ اور جسم جداگانہ ہٹاتے ہیں کوئی اختلاف ہوگا تو یہ اختلاف تجربہ کے نتائج کی عمدگی اور صحت پر اثر ڈالیگا، فی الحقیقت تولنے کا عمل ہوا میں کیا جاتا ہے اور بعد ازآں مناسب تصحیح کر لی جاتی ہے۔

۷۳- اگر جسم ایسا ہو جو پانی کے اندر گھل جائے مثلاً شکر، تو اسکو ایک ایسے مائع میں تولنا چاہیئے جس میں یہ گھل نہ سکے اور اس کی کثافت اضافی پہلے بلحاظ اس مائع کے معلوم کرلینی چاہیئے، شکر کی صورت میں الکحل کا استعمال نہایت مناسب ہوگا۔ پوٹاسیم پانی کو پھاڑ دیتی ہے اس لئے اسکو نفتہ میں تولنا چاہیئے۔ دفعہ ماقبل کے طریق کتابت کے بموجب

$$\frac{\text{ٹھوس جسم کی کثافت اضافی}}{\text{اُس مائع کی کثافت اضافی}} = \frac{و}{و + وَ - وً}$$

اب اگر اس مائع کی کثافتِ اضافی بلحاظ پانی کے معلوم ہو تو جسم مذکور کی کثافتِ اضافی بلحاظ پانی کے معلوم ہوسکتی ہے۔

۷۴- مشق ۱ — ایک کثافت اضافی کی بوتل کا وزن جب یہ پانی سے بھری ہوئی ہو ۱۰۰۰ گرین ہے، اگر بوتل کے اندر ۳۵۰ گرین وزن کی کوئی پسی ہوئی شے ڈالی جائے تو اس کا وزن ۱۲۵۰ گرین ہو جاتا ہے، سفوف کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

یہاں ۱۲۵۰ گرین = ۱۰۰۰ گرین + سفوف کا وزن - ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

∴ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = اس شے کا وزن - ۲۵۰ گرین
= ۱۰۰ گرین

$$\therefore \text{مطلوبہ کثافت اضافی} = \frac{\text{شے کا وزن}}{\text{ہٹائے ہوئے پانی کا وزن}} = \frac{\text{۳۵۰ گرین}}{\text{۱۰۰ گرین}} = \text{۳٫۵}$$

مشق ۲- اگر ہوا کے وزن کو نظر انداز کیا جائے تو کثافت اضافی

کی بوتل سے ایک ٹھوس جسم کی کثافتِ اضافی $\text{ک}_۲$ معلوم ہوتی ہے، جس صورت میں ہوا کی کثافتِ اضافی ع کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو ثابت کرو کہ جسم مذکور کی اصلی کثافت اضافی $\text{ک}_۱ - \text{ع}\,(\text{ک}_۱ - ۱)$ ہے

فرض کرو کہ جسم کی اصلی کثافتِ اضافی ک ہے اور حجم $\text{ح}_۱$ ہے، $\text{ح}_۲$ اُس پانی کا حجم ہے جو بوتل کے اندر آسکتا ہے، نیز فرض کرو کہ اُس شے کی کثافتِ اضافی جس سے تولنے کے باٹ بنائے گئے ہیں $\text{ک}_۲$ ہے اور پانی کے حجم کی اکائی کا وزن حسب معمول $\text{و}_۱$ ہے۔

تب چونکہ وَ، وً، اور و ظاہری وزن ہیں جو حسب دفعہ ۲ ۔ معلوم کئے گئے ہیں، اس لئے بوتل کا وزن ہوا میں + پانی کا وزن ہوا میں = وَ کا وزن ہوا میں

یعنی بموجب دفعہ ۶۳ بوتل کا وزن ہوا میں + $\text{ح}_۲\,\text{و}_۱\,(۱ - \text{ع})$

$$= \text{وَ}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_۲}\right) \quad \ldots (۱)$$

پس بوتل کا وزن ہوا میں + پانی کے $(\text{ح}_۲ - \text{ح}_۱)$ حجم کا وزن ہوا میں + جسم کے $\text{ح}_۱$ حجم کا وزن ہوا میں = وً کا وزن ہوا میں

یعنی بوتل کا وزن ہوا میں + $(\text{ح}_۲ - \text{ح}_۱)\,\text{و}_۱(۱ - \text{ع})$

$$+ \text{ح}_۱\,\text{و}_۱\,(\text{ک} - \text{ع}) = \text{وً}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_۲}\right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کو مساوات (۲) میں سے تفریق کرنے سے

$$-\text{ح}_۱\,\text{و}_۱\,(۱ - \text{ع}) + \text{ح}_۱\,\text{و}_۱\,(\text{ک} - \text{ع}) = (\text{وً} - \text{وَ})\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_۲}\right)$$

یعنی $\text{ح}_۱\,\text{و}_۱\,(\text{ک} - ۱) = (\text{وً} - \text{وَ})\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_۲}\right) \quad \ldots\ldots (۳)$

نیز چونکہ جسم کا وزن ہوا میں = و کا وزن ہوا میں

$$\therefore\ \text{ح}_۱\,\text{و}_۱\,(\text{ک} - \text{ع}) = \text{و}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_۲}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

(۳) کو (۴) پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ک}-1}{\text{ک}-\text{ع}} = \frac{\text{وً}-\text{وَ}}{\text{و}}$$

اب دفعہ ۷۲، (۲) سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ک}_1 = \frac{\text{و}}{\text{د} + (\text{وَ}-\text{وً})}$$

$$\therefore \quad \text{وً}-\text{وَ} = \text{و}\,\frac{\text{ک}_1-1}{\text{ک}_1}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ک}-1}{\text{ک}-\text{ع}} = \frac{\text{ک}_1-1}{\text{ک}_1}$$

$$\therefore \text{ک}\,\text{ک}_1 - \text{ک}_1 = \text{ک}\,\text{ک}_1 - \text{ک} - \text{ع}\,\text{ک}_1 + \text{ع}$$

یعنی $\text{ک} = \text{ک}_1 - \text{ع}\,(\text{ک}_1 - 1)$

امثلہ نمبری ۱۷

۱۔ کثافت اضافی کی ایک بوتل کا وزن ۹۵ء۷۰ گرین ہے، جب اسکو پانی سے بھرا جائے تو اس کا وزن ۳۴۶ء۷۸۱ گرین ہوتا ہے اور جب ایک دوسرے مائع سے بھرا جائے تو ۱۷ء۲۴۱ گرین، مؤخرالذکر مائع کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

۲۔ کچھ باٹوں سے کثافتِ اضافی کی ایک خالی بوتل کا دھڑا کرلیا گیا ہے اگر اس کو پانی سے بھرکر تولا جائے تو ان میں ۹۸۳ گرین کا اضافہ کرنا پڑتا ہے۔ لیکن اگر اس میں پانی کی بجائے الکحل بھرکر تولا جائے تو صرف ۰۷۳ گرین کا اضافہ کرنا پڑتا ہے، الکحل کی کثافت

اضافی معلوم کرو۔
۳۔ کثافت اضافی کی ایک بوتل کو جب پانی سے بھر کر تولا جائے تو اس کا وزن ۴۴ گرام ہوتا ہے لیکن جب اس بوتل میں کچھ لوہے کے ٹکڑے جنکا وزن ہوا میں ۱۰ گرام ہے ڈالے جائیں اور پھر بوتل کو پانی سے بھر کر تولا جائے تو مجموعی وزن ۷ء۵۲ گرام ہوتا ہے لوہے کی کثافت اضافی دریافت کرو۔
۴۔ کثافت اضافی کی ایک بوتل کا وزن جو پوری پانی سے بھری ہوئی ہے ۴ء۳۸ گرام ہے، جب اس میں کسی ٹھوس شے کے ۳ء۲۲ گرام ڈال کر اسکو تولا جاتا ہے تو کل وزن ۸ء۴۹ گرام ہوتا ہے، ٹھوس شے کی کثافت اضافی دریافت کرو۔
۵۔ اگر کثافت اضافی کی ایک بوتل کو پانی سے پورا بھر کر تولا جائے تو اس کا وزن ۲۱۲ گرین ہوتا ہے، جب اس میں دہات کے ۵۰ گرین ڈال دئے جائیں اور زائد پانی کو نکل جانے دیا جائے تو اس کا وزن ۲۵۴ گرین ہوتا ہے، دھات کی کثافت اضافی معلوم کرو۔
۶۔ اگر ہوا کے اثر کو نظر انداز کر کے کسی مائع کی ظاہری کثافت اضافی کثافت اضافی کی بوتل کے ذریعہ معلوم کی جائے تو ثابت کرو کہ اصلی کثافت اضافی دریافت کرنے کے لئے اُسی تصحیح کی ضرورت ہوگی جو دفعہ ۴۷ مشق (۲) میں کی گئی ہے۔

۵۷۔ آبی میزان ۔ یہ ایک معمولی ترازو ہوتی ہے فرق صرف اس قدر ہے کہ اس کے ایک پلڑے کی سیخیں جن سے پلڑا لٹکا ہوتا ہے دوسرے پلڑے کی سیخوں کی نسبت چھوٹی ہوتی ہیں

اس وجہ سے اس میزان کا ایک پلڑا دوسرے پلڑے کی نسبت اونچا رہتا ہے، اس اونچے پلڑے کے نیچے ایک کانٹا لگا ہوتا ہے جس کے ساتھ کوئی شے باندھ دی جاسکتی ہے۔

(۱) ایک ایسے جسم کی کثافت اضافی معلوم کرو جو پانی میں ڈوب جاتا ہے۔

فرض کرو کہ حسب معمول ہوا میں تولنے سے جسم کا وزن و ہے، اب جسم کو ایک مضبوط ڈوری سے اس کانٹے کے ساتھ لٹکا دو جو اونچے پلڑے کے پیندے میں لگا ہوا ہے اور جسم کو پانی کے ایک برتن کے اندر اس طرح بلا تکلف لٹکنے دو کہ جسم پانی کے اندر پورا ڈوبا رہے، تب دوسرے پلڑے میں باٹ رکھتے جاؤ حتیٰ کہ میزان کی ڈنڈی پھر افق کے متوازی ہو جائے، خیال رہے کہ جسم پانی کے اندر پورا ڈوبا رہے۔

فرض کرو کہ ان باٹوں کے وزنوں کا مجموعہ وَ ہے۔

تب وَ = جسم کا ظاہری وزن پانی میں = جسم کا اصلی وزن - ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

= د - ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

∴ و - وَ = ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

نیز چونکہ جسم کا وزن و ہے اس لئے مطلوبہ کثافتِ اضافی

$$= \frac{و}{و - وَ}$$

اگر وہ مائع جو استعمال کیا گیا ہے پانی نہ ہو بلکہ کوئی اور سیال ہو تو

$$\frac{و}{و - وَ} = \frac{\text{جسم کی کثافت اضافی}}{\text{اس مائع کی کثافت اضافی}}$$

اس سے ثابت ہوا کہ جسم اور مائع مستعلہ کی اضافی کثافتوں کی نسبت وہی ہوتی ہے جو جسم کے اصلی وزن کو اُس کمی کے ساتھ ہو جو مائع مفروض کے اندر جسم کو تولنے سے اسکے اصلی وزن میں واقع ہوتی ہے۔

(۲) ایک ایسے جسم کی کثافتِ اضافی معلوم کرو جو پانی میں تیرتا ہے۔

اس صورت میں جسم مذکور کو کسی ایسے جسم کے ساتھ باندھ دینا چاہیئے کہ دونوں ملکر پانی کے اندر ڈوب جائیں، موخرالذکر جسم کو لنگر کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ اکیلے جسم کا وزن و ہے اور لنگر کا وزن وَ ہے نیز جسم اور لنگر کا مجموعی وزن پانی کے اندر تولنے سے وِ ہے اور اکیلے لنگر کا وزن پانی میں تولنے سے وَِ ہے۔

تب وِ = لنگر اور جسم دونوں کا اصلی وزن ـ لنگر اور جسم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن .... (دفعہ ۶۲)

= و + وَ ـ جسم اور لنگر دونوں کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

اسلئے و + وَ ـ وِ = لنگر اور جسم دونوں کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن .... (۱)

یعنی وَ ـ وَِ = محض لنگر کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن .....(۲)

لہٰذا تفریق کرنے سے

$و - و_1 + وَ_1$ = محض جسم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

نیز چونکہ جسم کا اصلی وزن = و

اسلئے جسم کی مطلوبہ کثافتِ اضافی = $\frac{و}{و - و_1 + وَ_1}$

[نوٹ۔ یاد رہے کہ اس جواب میں وَ شامل نہیں ہے جو لنگر کا وزن ہے پس عملی تجربہ میں اس کے معلوم کرنے کی کوئی ضرورت نہیں]

(۳) ایک دئے ہوئے مائع کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔
ایک ایسا جسم لو جو دئے ہوئے مائع اور پانی دونوں میں حل نہ ہوتا ہو اور فرض کرو کہ اس کا اصلی وزن و ہے۔
جب اس کو حسبِ معمول آبی میزان کے چھوٹے پلڑے سے لٹکا کر پانی کے اندر تولا جائے تو فرض کرو کہ اس کا ظاہری وزن $و_1$ ہے
پانی کی بجائے دئے ہوئے مائع کے اندر اسی طرح تولنے سے فرض کرو کہ اس کا ظاہری وزن $وَ_1$ ہے۔

تب $و_1$ = جسم کا وزن - ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

اور $وَ_1$ = جسم کا وزن - ہٹائے ہوئے مائع کا وزن

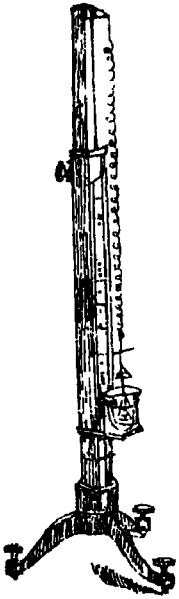
اس لئے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = $و - و_1$

اور ہٹائے ہوئے مائع کا وزن = $و - وَ_1$

اس لئے $و - وَ_1$ اور $و - و_1$ بالترتیب مائع زیر بحث اور پانی کے مساوی حجموں کے وزن ہیں۔

∴ مطلوبہ کثافت اضافی = $\frac{و - وَ_1}{و - و_1}$

۷۶ ـ جولی کی میزان

یہ میزان ایک لمبی پیچدار کمانی پر مشتمل ہوتی ہے جسکے نیچے کے سرے کے ساتھ ایک دوسرے کے اوپر دو پلڑے لگے ہوتے ہیں، اس کو اس طرح رکھا جاتا ہے کہ نیچے کا پلڑا پانی کے اندر ڈوبا رہتا ہے، کمانی کے بالمقابل ایک لمبی درجہ بندی کی ہوئی پٹڑی لگی ہوتی ہے، اس ترازو کا استعمال اس طرح کرتے ہیں، اس جسم کو جسکی کثافت اضافی معلوم کرنا مقصود ہوتا ہے اوپر کے پلڑے میں رکھتے ہیں اور جس درجہ تک کمانی کھنچ جاتی ہے اس کو مقابل کی پٹڑی پر دیکھ لیتے ہیں۔ تب جسم کی بجائے باٹ رکھ کر دیکھتے ہیں کہ مذکورہ بالا درجہ تک کھنچاؤ پیدا کرنے کے لئے کتنے وزن کی ضرورت ہوتی ہے، اس طرح سے جسم کا وزن معلوم ہو جاتا ہے، بعدازاں جسم کو پانی کے اندر نیچے کے پلڑے میں رکھ دیتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ کمانی اوپر اٹھ جائیگی اور اس کو کھنچاؤ کے اُسی درجہ پر لانے کے لئے اوپر کے پلڑے میں مزید وزن رکھنے کی ضرورت پڑے گی جو مزید وزن اس طرح سے رکھنا پڑیگا وہ صریحاً جسم کے وزن کی اُس کمی کو ظاہر کرے گا جو جسم مذکور کو پانی کے اندر تولنے سے اسکے اصلی وزن میں واقع ہوتی ہے یعنی بالفاظ دیگر یہ وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن کو ظاہر کریگا

اب ہمیں جسم کا اصلی وزن اور ہٹائے ہوئے پانی کا وزن دونوں معلوم ہو گئے جن سے کثافت اضافی معلوم ہوسکتی ہے۔

مشق ۱۔ تانبے کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۹۰۰ گرام ہے، جب اس کو پانی کے اندر تولا جاتا ہے تو اس کا وزن ۷۹۸٫۷۵ گرام رہ جاتا ہے، اس کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

یہاں ۷۹۸٫۷۵ گرام = ۹۰۰ گرام - اُس پانی کا وزن جس کو تانبا ہٹا دیتا ہے

∴ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = ۱۰۱٫۲۵ گرام

∴ کثافتِ اضافی مطلوبہ = $\frac{۹۰۰}{۱۰۱٫۲۵}$ = ۸٫۸۸

مشق ۲۔ کاگ کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۳۰ گرام ہے، جب اسکے ساتھ سیسے کا ایک ٹکڑا باندھ کر دونوں کو پانی میں تولا جاتا ہے تو مجموعی وزن ۶ گرام ہوتا ہے، اگر سیسہ کا وزن پانی کے اندر ۹۶ گرام ہو تو کاگ کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

اگر سیسہ کا وزن ہوا میں وَ ہو تو اُس پانی کا وزن جسکو کاگ اور سیسہ دونوں ہٹاتے ہیں = وَ + ۳۰ - ان کا مجموعی وزن پانی میں

= وَ + ۳۰ - ۶ = وَ + ۲۴

پس سیسہ کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

= وَ - ۹۶

اس لئے محض کاگ کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = {(وَ + ۲۴) - (وَ - ۹۶)} = ۱۲۰، اسلئے کاگ کی کثافت اضافی = $\frac{۳۰}{۱۲۰}$ = $\frac{۱}{۴}$

مشق ۳ ۔ پلاٹی نم کے ایک گولے کا وزن ہوا میں ۲۰٫۸۶ اونس ہے، پانی میں ۱۹٫۸۶ اور گندھک کے تیزاب میں ۱۹٫۳۶، پلاٹی نم اور گندھک کے تیزاب کی اضافی کثافتیں معلوم کرو۔

پلاٹی نم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = ۲۰٫۸۶ − ۱۹٫۸۶ = ۱ اونس

پلاٹی نم کے ہٹائے ہوئے تیزاب کا وزن

= ۲۰٫۸۶ − ۱۹٫۳۶ = ۱٫۵ اونس

اس لئے پلاٹی نم کی اضافی کثافت = ۲۰٫۸۶ اونس / ۱ اونس = ۲۰٫۸۶

اور گندھک کے تیزاب کی اضافی کثافت = ۱٫۵ اونس / ۱ اونس = ۱٫۵

۸۷ ۔ اگر وہ جسم جسکی کثافت اضافی معلوم کرنا مقصود ہے پانی میں گھل جانے والا ہو جیسے شکر یا پانی کو جذب کرنے والا ہو تو اس کے اوپر موم کی تہ چڑھائی جاسکتی ہے۔

مشق ۔ ۶۸ گرام شکر کے اوپر ۱۱ گرام موم کی تہ چڑھائی گئی ہے، موم کی کثافت اضافی ۰٫۸۸ ہے، اگر دونوں کا مجموعی وزن پانی میں ½۲۶ گرام ہو تو شکر کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

اُس پانی کا وزن جسکو شکر اور موم دونوں ہٹاتے ہیں

= ۶۸ + ۱۱ − ½۲۶ = ½۵۲ گرام

اور صرف موم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

= ۱/۰٫۸۸ × ۱۱ گرام = ½۱۲ گرام

∴ اس پانی کا وزن جسکو صرف شکر ہٹاتی ہے

= ۵۲½ − ۱۲½ = ۴۰ گرام

∴ شکر کی کثافت اضافی = ۶۸/۴۰ = ۱٫۷

امثلہ نمبری ۱۸

[امثلہ ۱ تا ۱۷ میں ہوا کی کثافت اضافی کو نظرانداز کیا گیا ہے]

۱ — اگر ایک جسم کا وزن ہوا میں ۷۳۲ گرام ہو اور پانی میں ۲۵۲ گرام تو اُس کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۲ — سُربی شیشے کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۲٫۴ اونس ہے اور پانی میں ۱٫۶ اونس، اس کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۳ — نیلے تھوتھے کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۳ اونس ہے، اور تارپین کے تیل میں ۱٫۸۶ اونس، اگر تارپین کے تیل کی کثافت اضافی ٫۸۸ ہو تو نیلے تھوتھے کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۴ — پوٹاسیم پانی کو پھاڑ دیتی ہے، اس کی کثافت اضافی معلوم کرنے کے لئے اس کے ایک ٹکڑے کو جس کا وزن ہوا میں ۴۳۲٫۵ گرام ہے نفتہ کے اندر تولا گیا ہے، نفتہ میں اس کا وزن ۹ گرام ہے، اگر نفتہ کی کثافتِ اضافی ٫۸۴۷ ہو تو پوٹاسیم کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۵ — سیسے کے ایک ٹکڑے کا وزن پانی میں ۳۰ گرین ہے، اسکو لکڑی کے ایک ٹکڑے کے ساتھ باندھا گیا ہے جس کا وزن ہوا میں ۱۲۰ گرین ہے، دونوں کا وزن پانی میں ۲۰ گرین ہے، لکڑی کی کثافت اِضافی معلوم کرو۔

۶ ۔ ایک ٹھوس جسم کا وزن جو پانی میں تیر سکتا ہے ۴ پونڈ ہے، اس کے ساتھ ایک وزنی دہات باندھ کر دونوں کو پانی میں تولا گیا ہے اور ان دونوں کا وزن ۲ پونڈ ہے، صرف دہات کا وزن پانی میں ۸ پونڈ ہے، ٹھوس جسم کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۷ ۔ ایک جسم کے ساتھ جسکا وزن ۳۰۰ گرام ہے اور کثافتِ اضافی ۵ ہے ایک دوسرا جسم باندھ کر دونوں کو اکٹھا پانی میں تولا گیا ہے اور یہ وزن ۲۰۰ گرام ہوتا ہے، اگر ساتھ بندھے ہوئے جسم کا وزن ۲۰۰ گرام ہو تو اس کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۸ ۔ شیشہ کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۴۰ گرام ہے، پانی میں ۲۲ گرام، الکحل میں ۲۵٫۸ گرام، الکحل کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۹ ۔ سیسے کی ایک گولی کا وزن ہوا میں ۱۰٫۹ اونس ہے اور زیتون کے تیل میں ایک اونس، اگر سیسے کی کثافت اضافی ۱۱٫۴ ہو تو زیتون کے تیل کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۱۰ ۔ شیشے کے ایک گیند کا وزن ہوا میں ۶۶۵٫۸ گرام ہے، پانی میں ۴۶۵٫۸ گرام اور گندھک کے تیزاب میں ۲۹۷٫۶ گرام، تیزاب کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۱ ۔ شکر کے ایک ڈھیلے کا وزن ۴۰ گرام ہے، اس کے گرد ۵٫۷۶ گرام موم کی تہ چڑھائی گئی ہے جس کی کثافت اضافی ۰٫۹۶ ہے، اگر موم اور شکر دونوں کا مجموعی وزن پانی میں ۱۴٫۷۶ گرام ہو تو شکر کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۲ ۔ تانبے کے ایک ٹکڑے کا وزن ہوا میں ۷۲ گرام ہے، اسکے

اوپر موم کی تہ چڑھائی گئی ہے جس کا وزن ۱۸ گرام ہے اور جس کی کثافتِ اضافی ۹ء ہے، اگر دونوں کا مجموعی وزن پانی میں ۶۲ گرام ہو تو تانبے کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۳۔ سنگ مرمر کے ایک ٹکڑے کی کثافت اضافی ۸۴ء۲ ہے، اس کا وزن پانی میں ۹۲ گرام ہے اور تارپین کے تیل میں ۹۸ء۵ گرام، تیل کی کثافت اضافی اور سنگ مرمر کے ٹکڑے کا حجم دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک جسم دو مائعات میں تولا گیا ہے، ایک مائع کی کثافتِ اضافی ۸ء ہے اور دوسرے کی ۲ء۱، دونوں حالتوں میں جسم کے ظاہری وزن بالترتیب ۱۸ گرام اور ۱۲ گرام ہیں، جسم کا اصلی وزن اور کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک جسم کو خلا میں تولنے سے اس کا وزن معلوم کیا گیا ہے اور پھر ایک لنگر کو پانی میں تولنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لنگر کا یہ وزن جسم کے اس وزن کا ۵ گنا ہے، نیز لنگر اور جسم دونوں کا مجموعی ظاہری وزن پانی میں جسم کے اِسی وزن کا ۴ گنا ہے، جسم مذکور کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک جسم کو ہوا اور پانی دونوں میں تولا گیا ہے، ہوائی وزن آبی وزن کا ۴ گنا ہے، جب اس کو کسی دوسرے سیال میں تولا جاتا ہے تو جسم کا ظاہری وزن جو اس سیال میں ہے وہ آبی وزن کے $\frac{3}{4}$ کے مساوی ہے، دوسرے سیال کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۷۔ کہا جاتا ہے کہ انگلستان کے شاہان سٹوآرٹ کا تاج جو سترہویں صدی عیسوی میں توڑ دیا گیا خالص سونے کا بنا ہوا تھا۔ اس کی

کثافتِ اضافی ۲ء۱۹ تھی اور وزن ½ ۷ پونڈ، دریافت کرو کہ اس کا پانی میں کیا وزن ہوگا۔

اگر اس میں چاندی (کثافتِ اضافی = ۵ء۱۰) کی آمیزش ہوتی اور اس کا وزن پانی میں ۷ ۱/۴ پونڈ ہوتا تو بتاؤ اس میں ہر دھات کی کیا کیا مقدار ہوتی۔

۱۸ — ایک جسم کی کثافتِ اضافی آبی میزان کے ذریعہ ک نکلتی ہے جبکہ تجربہ ہوا میں کیا جائے اور ہوا کے اثر کو نظر انداز کیا جائے۔ ثابت کرو کہ محصلہ کثافت اضافی اصلی کثافت اضافی سے بقدر ع(ک-۱) بڑی ہے جہاں ع ہوا کی کثافتِ اضافی کو تعبیر کرتا ہے۔

۷۹ — مائع پیما

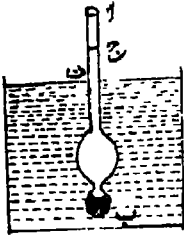
مائع پیما ایک آلہ ہوتا ہے جسکو کسی مائع کے اندر تیرانے سے مائع مذکور کی کثافتِ اضافی معلوم ہوسکتی ہے، مائع پیما کئی طرح کا ہوتا ہے لیکن یہاں ہم صرف دو قسموں کا ذکر کرینگے۔

(۱) معمولی مائع پیما اور (۲) نکلسن کا مائع پیما

۸۰ — معمولی مائع پیما۔ اس آلہ میں شیشے کی ایک ڈنڈی ہوتی ہے جس کے ایک سرے پر ایک یا دو جوف ہوتے ہیں، نیچے کے جوف میں پارہ بھرا ہوتا ہے جسکی وجہ سے تیرتے وقت مائع پیما کی ڈنڈی انتصابی سمت میں کھڑی رہتی ہے۔

کسی مائع مفروضہ کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

مائع مفروضہ میں مائع پیما کو ڈال دو اور فرض کرو کہ یہ آلہ نقطہ ن تک مائع کی سطح کے اندر ڈوب جاتا ہے، جب اس کو پانی

میں ڈبویا جاتا ہے تو فرض کرو کہ یہ
پانی کے اندر نقطہ ج تک ڈوب
جاتا ہے ۔

فرض کرو کہ مائع پیما کا کل حجم
ح ہے اور ڈنڈی کی عمودی تراش
کا رقبہ ا ہے جو ڈنڈی کے کل
طول پر یکساں ہے۔

جب مائع پیما کو پہلے مائع کے اندر ڈالا جاتا ہے تو ڈنڈی کے اُس حصہ کا طول جو مائع کے باہر رہتا ہے ا ن ہے اور حجم ا × ان ہے، پس جو حجم دئے ہوئے مائع کے اندر غرق ہے وہ ح - ا × ا ن ہے۔

اسی طرح سے جب اسکو پانی میں رکھا جاتا ہے تو غرق شدہ حجم
= ح - ا × ا ج

دونوں صورتوں میں ہٹائے ہوئے مائعات کے وزن مائع پیما کے وزن کے مساوی ہیں، یعنی دو حالتوں میں ہٹائے ہوئے مائعات کے اوزان باہم مساوی ہیں۔

اسلئے اگر مائع زیر غور کی کثافتِ اضافی ض ہو تو

$$(ح - ا \times ان) \times ض = ح - ا \times اج$$

$$\therefore ض = \frac{ح - ا \times اج}{ح - ا \times ان}$$

بازار میں جو معمولی مائع پیما فروخت ہوتے ہیں ان کی ڈنڈیوں پر

بالعموم درجے لگے ہوتے ہیں اور ہر نشان کے مقابل اُس مائع کی کثافتِ اضافی لکھی ہوتی ہے جس کے اندر مائع پیما اُس خاص نشان تک ڈوب جاتا ہے۔

اگر ہم ایک ایسا مائع پیما بنانا چاہیں جس سے ہر قسم کے مائع کی کثافتِ اضافی دریافت ہو سکے تو اس کی ڈنڈی غیر معمولی طور پر لمبی رکھنی پڑیگی، اس دشواری کے خیال سے مائع پیما تین طرح کے بنائے جاتے ہیں، ایک وہ جو بالخصوص پانی سے بہت ہلکے مائعات کی اضافی کثافت معلوم کرنے کے لئے موزون ہوتے ہیں دوسرے وہ جو درمیانی مائعات کے لئے موزون ہیں اور تیسرے وہ جو بہت بھاری مائعات کی کثافتِ اضافی دریافت کرنے میں کام آتے ہیں۔

۱۸ - فرض کرو کہ مائع پیما کی ڈنڈی (ممدودہ بشرط ضرورت) پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ ڈنڈی کے طول ا و کا حجم ح ہے جہاں ح مائع پیما کا کل حجم ہے۔

اسلئے ح = اِ × ا و

تب دفعہ ماقبل کے نتیجہ کی رو سے

ا
ج
ن
و

$$\text{ض} = \frac{\text{ح} - \text{اِ} \times \text{ا ج}}{\text{ح} - \text{اِ} \times \text{ا ن}}$$

$$= \frac{\text{اِ} \times \text{ا و} - \text{اِ} \times \text{ا ج}}{\text{اِ} \times \text{ا و} - \text{اِ} \times \text{ا ن}}$$

$$= \frac{\text{و ج}}{\text{و ن}}$$

$$\therefore \quad \text{و ن} = \frac{\text{و ج}}{\text{ض}}$$

اس لئے نظری طور پر مائع پیما کی درجہ بندی یوں ہوسکتی ہے،
فرض کرو کہ ج وہ نقطہ ہے جہاں تک مائع پیما پانی میں تیرتا ہے
اور ڈنڈی پر یا ممدودہ ڈنڈی پر ایک نقطہ و ایسا ہے کہ ڈنڈی
کے طول و ج کا حجم پانی کے اُس حجم کے مساوی ہے جس کو
مائع پیما پانی میں تیرتے وقت ہٹاتا ہے، تب کسی معلوم کثافت
اضافی ض کے نشان کا مقام ن ذیل کی مساوات سے معلوم
ہوسکتا ہے

$$\text{و ن} = \frac{\text{و ج}}{\text{ض}}$$

اس مساوات پر غور کرنے سے فوراً معلوم ہوجاتا ہے کہ اگر اضافی
کثافتیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو و ن فاصلے سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے
اور برعکس اس کے اگر فاصلے و ن سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اضافی
کثافتیں سلسلہ موسیقیہ میں ہونگی۔
پس درجہ بندی کے لحاظ سے معمولی مائع پیما دو طرح کے ہوتے ہیں
(۱) ٹوڈل کا مائع پیما جو انگلستان میں زیادہ استعمال ہوتا ہے، اسمیں
ض کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ کے موافق صعود کرتی ہیں،
(مثلاً ۱، ۱۰۲۵، ۱۰۵، ۱۰۷۵، ......) اور ان کے جواب
میں فاصلہ و ن کی قیمتیں سلسلہ موسیقیہ میں نزول کرتی ہیں، اس
طرح سے درجہ بندی کے نشانات جوں جوں ڈنڈی پر نیچے آتے
جائیں گے ان کا باہمی فاصلہ کم ہوتا جائیگا۔
(۲) بومے کا مائع پیما جسکا استعمال یورپ کے دیگر ممالک میں

کیا جاتا ہے، اس میں ون کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں اس لئے درجہ بندی کے نشانات کے باہمی فاصلے برابر ہوتے ہیں اور ان کے متعلقہ ض کی قیمتیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوتی ہیں۔

۸۲۔ مشق ۱ – ایک معمولی مائع پیما کا کل حجم ۶ مکعب انچ ہے اور اس کی ڈنڈی کی تراش مربع شکل کی ہے جسکا عرض $\frac{۱}{۸}$ انچ ہے، یہ مائع پیما ایک مائع میں تیرتے وقت ۲ انچ سطح سے باہر رہتا ہے اور دوسرے مائع میں تیرتے وقت ۴ انچ، دونوں مائعات کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرو۔

پہلے مائع میں غرق شدہ حجم $= ۶ - ۲ \times \frac{۱}{۶۴} = \frac{۱۹۱}{۳۲}$ مکعب انچ

دوسرے مائع میں غرق شدہ حجم $= ۶ - \frac{۴}{۶۴} = \frac{۱۹۰}{۳۲}$ مکعب انچ

اسلئے اگر مائعات کی اضافی کثافتیں بالترتیب ض$_۱$ اور ض$_۲$ ہوں

$$\text{تو}\ \frac{۱۹۱}{۳۲}\,\text{ض}_۱ = \frac{۱۹۰}{۳۲}\,\text{ض}_۲$$

$$\therefore\ \frac{\text{ض}_۱}{\text{ض}_۲} = \frac{۱۹۰}{۱۹۱}$$

مشق ۲ – ایک معمولی مائع پیما کی ڈنڈی اسطوانہ کی شکل کی ہے اور درجہ بندی کا سب سے اوپر کا نشان کثافت اضافی ا کو ظاہر کرتا ہے اور سب سے نیچے کا نشان ۱ء۲ کو، بتاؤ کہ جو نشان ان دونوں کے عین درمیان میں ہوگا وہ کس کثافتِ اضافی کو تعبیر کریگا۔

دفعہ ۸۱ کے حروف اور علامات استعمال کرنے سے فرض کرو کہ اگر مائع کی کثافتِ اضافی ۱ ہو تو نقطہ ج مائع کی سطح میں ہوتا ہے اور اگر کثافت اضافی ۱ء۲ ہو تو نقطہ ن سطح میں ہوتا ہے۔

یعنی $و ن = \frac{و ج}{۱ء۲}$ ..... (۱)

فرض کرو کہ ج ن کا نقطہ تنصیف $ن_۱$ ہے اور اس کے متعلقہ کثافت اضافی ک ہے

اس لئے $و ن_۱ = \frac{و ج}{ک}$ ..... (۲)

$\therefore \frac{و ج}{ک} = و ن_۱ = \frac{۱}{۲} (و ج + و ن)$

$= \frac{۱}{۲}\left[و ج + \frac{و ج}{۱ء۲}\right]$

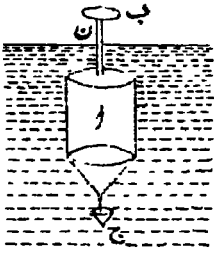
$\therefore \frac{۲}{ک} = ۱ + \frac{۵}{۶} = \frac{۱۱}{۶}$

یعنی $ک = \frac{۱۲}{۱۱} = ۱ء۰۹$

یہ امر قابل غور ہے کہ یہ جواب ۱ اور ۲ء۱ کے ٹھیک درمیان میں نہیں ہے پس زیادہ عام طور پر اگر مائع پیما کے دو درجوں کی متعلقہ اضافی کثافتیں بالترتیب $ض_۱$ اور $ض_۲$ ہوں تو ان درجوں کے عین درمیانی نشان کی متعلقہ کثافت اضافی ض، مساوات ذیل سے حاصل ہوگی

$$\frac{۲}{ض} = \frac{۱}{ض_۱} + \frac{۱}{ض_۲}$$

۱۰۹ - نکلسن کا مائع پیما - اس آلہ میں دھات کا ایک مجوّف برتن ا ہوتا ہے جس کے اوپر ایک پتلی ڈنڈی کے ذریعہ ایک چھوٹا پلڑا ب لگا ہوتا ہے، اس پلڑے میں باٹ رکھے جا سکتے ہیں، مائع کے نچلے سرے پر ایک چھوٹی وزن دار پیالی یا ٹوپی ہوتی ہے جس کو اس قدر بوجھل

بنایا جاتا ہے کہ تیرتے وقت آلہ کا توازن قائم رہتا ہے۔
یہ آلہ دو مائعات کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرنے اور نیز کسی ٹھوس جسم کی کثافتِ اضافی معلوم کرنے میں کام آتا ہے۔ اس کی ڈنڈی پر ایک نمایاں نشان ن لگا ہوتا ہے، آلہ کے استعمال کا طریقہ یہ ہے کہ اس کے اوپر کے پلڑے میں اتنا وزن رکھتے ہیں جس سے کہ یہ نشان ان دو مائعات کی سطح میں آجائے جن کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرنا مقصود ہوتا ہے۔

(۱) کسی مائع کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔
فرض کرو کہ آلہ کا وزن وٖ ہے اور وہ وزن جو آلہ کو دئے ہوئے مائع میں نقطہ ن تک ڈبونے کے لئے پلڑے میں رکھنا پڑتا ہے وَ ہے اسی طرح سے وہ وزن جو آلہ کو نقطہ ن تک پانی میں ڈبو سکتا ہے وٖ ہے۔
دفعہ ۵۷ کی رو سے ظاہر ہے کہ صورت اول میں و+وَ آلہ کے ہٹائے ہوئے مائع کا وزن ہے۔
اسی طرح سے و+وٖ آلہ کے ہٹائے ہوئے پانی کے وزن کے مساوی ہے لہٰذا دئے ہوئے مائع اور پانی کے مساوی حجموں کے وزن بالترتیب و+وَ اور و+وٖ ہیں۔
پس مطلوبہ کثافتِ اضافی = $\frac{و+وَ}{و+وٖ}$

(۲) ایک ٹھوس جسم کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ آلہ کو نقطہ ن تک مائع میں ڈبونے کے لئے پلڑے ب میں وزن و۱ رکھنا پڑتا ہے، اب اس وزن کو ہٹا کر پلڑے میں یہ ٹھوس جسم رکھ دو اور فرض کرو کہ آلہ کو ن تک ڈبونے کے لئے اِس جسم کے علاوہ مزید وزن و۲ کی ضرورت ہوتی ہے۔

تب صریحاً ٹھوس جسم کا وزن = و۱ - و۲

اب جسم کو پیالی ج میں پانی کے اندر رکھو اور فرض کرو کہ آلہ کو نقطہ ن تک ڈبونے کے لئے پلڑے ب میں و۳ وزن رکھنا پڑتا ہے۔

ظاہر ہے کہ وزن و۲ اور جسم کا وزن پانی کے باہر دونوں ملکر وہی اثر پیدا کرتے ہیں جو جسم کا وزن پانی کے اندر اور وزن و۳ ملکر پیدا کرتے ہیں۔

∴ ٹھوس جسم کا وزن + و۲ = جسم کا وزن پانی میں + و۳

∴ و۳ - و۲ = جسم کا وزن - جسم کا وزن پانی میں

= جسم کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن [دفعہ ۶۲]

نیز و۱ - و۲ = جسم کا وزن

اس لئے مطلوبہ کثافت اضافی = $\frac{و_۱ - و_۲}{و_۳ - و_۲}$

غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ نکلسن کے مائع پیما کے ہٹائے ہوئے مائع کا حجم مستقل ہوتا ہے اور معمولی مائع پیما کے ہٹائے ہوئے مائع کا وزن مستقل ہوتا ہے۔

۴۸۔ شق نیکلسن کے مائع پیما کو پانی میں معین نشان تک ڈبونے کے لئے اسکے اوپر کے پلڑے میں ۲۰۰ گرین رکھنے پڑتے ہیں، جب اس کے اوپر کے پلڑے میں پتھر کا ایک ٹکڑا رکھ دیا جاتا ہے تو اس کو نشان معینہ تک ڈبونے کے لئے مزید ۸۰ گرین کی ضرورت ہوتی ہے۔ اگر پتھر کے ٹکڑے کو نیچے کی پیالی میں رکھا جائے تو ۱۲۸ گرین درکار ہوتے ہیں، پتھر کی کثافتِ اضافی معلوم کرو۔

اگر مائع پیما کا وزن و گرین ہو تو ہٹائے ہوئے مائع کا وزن مساوی ہے

(۱) و + ۲۰۰

(۲) و + ۸۰ + پتھر کا وزن

(۳) و + ۱۲۸ + پتھر کا وزن پانی میں

∴ و + ۲۰۰ = و + ۸۰ + پتھر کا وزن

= و + ۱۲۸ + پتھر کا وزن پانی میں

∴ ۱۲۰ = پتھر کا وزن (۱)

۷۲ = پتھر کا وزن پانی میں

= ۱۲۰ - پتھر کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن ۔۔(۲)

∴ مطلوبہ کثافت اضافی = پتھر کا وزن / پتھر کے ہٹائے ہوئے پانی کا وزن = ۱۲۰ / (۱۲۰ - ۷۲)

= ۱۲۰/۴۸ = ۵/۲ = ۲٫۵

امثلہ نمبری ۱۹

۱۔ ایک معمولی مائع پیما کا وزن ۲ اونس ہے، اس کی درجہ بندی ۱ سے ۱٫۲

تک کی اضافی کثافتوں کے لئے کی گئی ہے آلہ کے اُن حصوں کے حجم مکعب انچوں میں دریافت کرو جو بالترتیب نشانات ۱، ۱۰۱ اور ۲۰۱ کے نیچے ہیں۔

۲ ۔ ایک معمولی مائع پیما کو جب پانی کے اندر چھوڑا جاتا ہے تو اس کے حجم کا $\frac{9}{10}$ ڈوبا رہتا ہے اور جب اس کو دودھ میں چھوڑا جاتا ہے تو اس کے حجم کا $\frac{90}{103}$ ڈوبا رہتا ہے، دودھ کی کثافت اضافی دریافت کرو

۳ ۔ ایک مائع پیما کو جب ایک ایسے سیال کے اندر چھوڑا جاتا ہے جس کی کثافت اضافی ۲۰۱ ہے تو اس کی ڈنڈی ۴ انچ مائع کے باہر رہتی ہے، اور ۳۰۱ کثافتِ اضافی کے ایک دوسرے مائع میں ۸ انچ بتاؤ کہ ایک ایسے مائع میں جس کی کثافتِ اضافی ۳۰۱ ہو اسکی ڈنڈی مائع سے کتنی باہر رہیگی ۔

۴ ۔ ایک مائع پیما کی درجہ بندی کا سب سے نچلا نشان ۶۰۱ کثافتِ اضافی کو تعبیر کرتا ہے، اگر سب سے اوپر کے نشان اور سب سے نیچے کے نشان کا درمیانی نقطہ ۳۰۱ کثافت اضافی کو تعبیر کرے تو سب سے اوپر کے نقطہ کے متعلقہ کثافت اضافی دریافت کرو۔

۵ ۔ ایک معمولی مائع پیما کا حجم ۱۲ مکعب سنٹی میٹر ہے اور وزن ۹ گرام، اگر اس کو ۸۵ء کثافت اضافی والے ایک سیّال میں چھوڑا جائے تو بتاؤ کہ اسکا کتنا حصہ سیال کے باہر رہیگا۔

۶ ۔ ایک معمولی مائع پیما کے جوف کا کچھ حصہ کثرت استعمال سے گھس گیا ہے، اس وجہ سے یہ پانی کی کثافت اضافی ۱۰۰۲ ظاہر کرتا ہے بتاؤ کہ اس کے وزن کی کونسی کسر کم ہوگئی ہے۔

۷ ۔ ا، ب اور ج تین سیال ہیں، ان تینوں میں ایک معمولی مائع پیما چھوڑا گیا ہے جس کی ڈنڈی ا میں ۲ انچ باہر رہتی ہے، ب میں ۳ انچ اور ج میں ۴ انچ، اگر ا کی کثافت اضافی ۸ر ہو اور ب کی ۸۵ر تو ج کی کثافت اضافی دریافت کرو۔

۸ ۔ نکلسن کے ایک مائع پیما کا وزن ۸ اونس ہے اس کو ایک سیال میں معین نشان تک ڈبونے کے لئے اس کے پلڑے میں ۲ اونس کا مزید وزن رکھنا پڑتا ہے اور دوسرے سیال میں اسی نقطہ تک ڈبونے کے لئے ۵ اونس کا، دونوں سیالوں کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرو۔

۹ ۔ ایک نکلسن کے مائع پیما کا وزن $\frac{3}{4}$۴ اونس ہے، دو مائعات میں اس کو ثابت نقطہ تک ڈبونے کے لئے اس کے پلڑے میں بالترتیب ۲ اونس اور $\frac{3}{8}$۲ اونس وزن رکھنے پڑتے ہیں، دونوں مائعات کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ کرو۔

۱۰ ۔ ایک نکلسن کے مائع پیما کا وزن $\frac{3}{4}$۳ اونس ہے، اس کو ثابت نقطہ تک پانی میں ڈبونے کیلئے $\frac{3}{4}$۱ اونس وزن درکار ہوتا ہے، بتاؤ کہ اس کو اس نقطہ تک ۲ر۲ کثافت اضافی والے ایک سیال میں ڈبونے کے لئے کتنا وزن درکار ہوگا۔

۱۱ ۔ ایک نکلسن کے مائع پیما کو اس کے نقطہ معینہ تک ڈبونے کے لئے ۲۲ گرین درکار ہوتے ہیں، جب ایک ٹھوس شئے اس کے اوپر کے پلڑے میں رکھی جاتی ہے تو صرف ۱۲ گرین مزید وزن کی ضرورت ہوتی ہے۔ جب اس شئے کو اس کے نیچے کی پیالی میں مائع کے اندر رکھا جاتا ہے تو ۱۶ گرین کافی ہوتے ہیں، اس ٹھوس شئے کی کثافت اضافی

معلوم کرو۔

۱۲- ایک نکلسن کے مائع پیما کا اپنا وزن ۱۲۵۰ گرین ہے، جب ایک چھوٹا جسم اس کے اوپر کے پلڑے میں رکھا جاتا ہے تو آلہ کو اس کے نقطہ معینہ تک ڈبونے کے لئے مزید ۵۳۰ گرین وزن پلڑے میں رکھنا پڑتا ہے، لیکن اگر جسم کو نیچے کی پیالی میں رکھا جائے تو ۶۲۰ گرین کی ضرورت ہوتی ہے، اس جسم کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

۱۳- ایک نکلسن کے مائع پیما میں باٹوں کی کثافت اضافی ۸ ہے، اس کے اوپر کے پلڑے میں ۲ اونس وزن رکھنے سے مائع پیما جس نقطہ تک ڈوب جاتا ہے اس کو اسی نقطہ تک ڈبونے کے لئے نیچے کی پیالی میں کتنا وزن رکھنا پڑے گا؟

۱۴- تجربہ میں ہوا کے اثر کو نظرانداز کر کے ایک جسم کی کثافتِ اضافی نکلسن کے مائع پیما سے $ک_1$ دریافت کی گئی ہے، اگر ہوا کی کثافتِ اضافی عہ ہو تو ثابت کرو کہ جسم کی اصلی کثافتِ اضافی $ک_1 - عہ (ک_1 - 1)$ ہے، نیز اگر جسم کا ظاہری وزن تجربہ سے و معلوم ہوا ہو تو اس کا اصلی وزن بھی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ باٹوں اور جسم زیر بحث کی اصلی اضافی کثافتیں بالترتیب $ک_2$ اور ک ہیں، اور $و_1$، $و_2$ اور $و_3$ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۸۳ میں تجویز ہو چکے ہیں، نیز فرض کرو کہ جسم اور آلہ کے اصلی وزن بالترتیب وَ اور وً ہیں

تب دفعہ ۸۳ کے مطابق

$$و = و_1 - و_2 \quad \text{اور} \quad ک_1 = \frac{و_1 - و_2}{و_3 - و_2}$$

چونکہ تجربہ دفعہ ۸۳ کے طریقہ پر کیا گیا ہے

اسلئے $\text{و}' + \text{و}_{۱}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right) =$ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

$\text{و}' + \text{و}_{۲}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right) + \text{و}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}}\right) =$ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

اور $\text{و}' + \text{و}_{۳}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right) + \text{و}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ک}}\right) =$ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

∴ عمل تفریق سے

$$\text{و}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}}\right) = (\text{و}_{۱} - \text{و}_{۲})\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right) \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{و}\left(\frac{۱ - \text{ع}}{\text{ک}}\right) = (\text{و}_{۳} - \text{و}_{۲})\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

لہذا تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ک} - \text{ع}}{۱ - \text{ع}} = \frac{\text{و}_{۱} - \text{و}_{۲}}{\text{و}_{۳} - \text{و}_{۲}} = \text{ک}_{۱}$$

$$\therefore \text{ک} = \text{ع} + \text{ک}_{۱}(۱ - \text{ع}) = \text{ک}_{۱} - \text{ع}(\text{ک}_{۱} - ۱)$$

نیز (۱) سے

$$\text{و} = \text{و}\,\frac{۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}}{۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}}} = \frac{\text{و}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right)}{\text{ک} - \text{ع}} \times \text{ک}$$

$$= \frac{\text{و}\left(۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right)}{\text{ک}_{۱}(۱ - \text{ع})}\left[\text{ک} - \text{ع}(\text{ک}_{۱} - ۱)\right]$$

$$= \text{و}\left[۱ - \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۲}}\right]\left[۱ + \frac{\text{ع}}{\text{ک}_{۱}(۱ - \text{ع})}\right]$$

ہم نے ان حسابات میں اس ہوا کے وزن کو نظر انداز کر دیا ہے جس کو

مائع پیما کا وہ حصہ جو ڈوبا ہوا نہیں ہے ہٹاتا ہے، یہ مستقل رہتا ہے اس لیئے دَ کی طرح مساواتوں (۱) اور (۲) میں رونما نہیں ہوتا۔

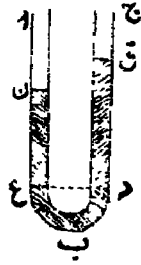
۱۵۔ خلا میں استعمال کرنے کے لحاظ سے ایک مائع پیما کی درجہ بندی صحیح ہے، ثابت کرو کہ اگر اسکو ہوا میں استعمال کیا جائے اور ہوا کی کثافتِ اضافی کہ ہو تو کسی شے کی محصلہ کثافتِ اضافی میں اس کی اصلی کثافتِ اضافی کے کہ کا اضافہ ہو جائے گا جہاں کہَ کو کہ سے وہی نسبت ہے جو مائع پیما کے باہر کے حصہ کے حجم کو ڈوبے ہوئے حصہ کے حجم کے ساتھ ہے۔

۱۶۔ ایک معمولی مائع پیما کے جوف سے ایک ذرا سا ٹکڑا اتر گیا ہے، اور اس سے تین مائعات کی اضافی کثافتیں عہَ، بہَ اور جہَ معلوم کی گئی ہیں، اگر ان کی اصلی اضافی کثافتیں عہ بہ اور جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جہ = جہَ عہ بہ (عہَ − بہَ) ⁄ [عہَ بہَ (عہ − بہ) − جہَ (عہ بہَ − بہ عہَ)]

۸۵۔ لانمانلی کے ذریعہ کثافتِ اضافی معلوم کرنیکا طریقہ

اگر دو مائعات ایسے ہوں جو آپس میں نہ ملیں تو ان کی اضافی کثافتوں کا مقابلہ ایک خمدار نلی کے ذریعہ بھی ہوسکتا ہے۔

ا ب ج ایک خمدار نلی ہے، اس کی دونوں شاخیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور اس کی عمودی تراشش ہرجگہ یکساں ہے۔

دو شاخوں میں دو مائعات ڈالے گئے ہیں جن کی مشترک سطح د پر ہے اور جن کی کھلی سطحیں ن اور ق پر ہیں۔

فرض کرو کہ نقطہ د، شاخ ج ب پر ہے اور شاخ ا ب میں ایک نقطہ ع ایسا ہے کہ اس کی ہمواری د کی ہمواری کے برابر ہے۔

نیز فرض کرو کہ دو سیالوں کی اضافی کثافتیں بالترتیب ض_1 اور ض_2 ہیں، اور معیاری شئے کے حجم کی ایک اکائی کا وزن و ہے تب ع اور د پر کے دباؤ بالترتیب

$\text{ض}_1 \times \text{و} \times \text{ع ن} + \text{ہ}$ اور $\text{ض}_2 \times \text{و} \times \text{د ق} + \text{ہ}$ ہیں جہاں ہ کرہ ہوائی کے دباؤ کو تعبیر کرتا ہے۔

چونکہ مائعات متوازن ہیں اس لئے یہ دباؤ باہم مساوی ہوں گے۔

$$\therefore \text{ض}_1 \times \text{و} \times \text{ع ن} + \text{ہ} = \text{ض}_2 \times \text{و} \times \text{د ق} + \text{ہ}$$

$$\therefore \frac{\text{ض}_1}{\text{ض}_2} = \frac{\text{د ق}}{\text{ع ن}}$$

یعنی دو مائعات کی اضافی کثافتوں کی باہمی نسبت مساوی ہے اُنکے ارتفاعوں کی نسبت معکوس کے جہاں یہ ارتفاع بالترتیب سطح مشترک سے ناپے گئے ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۰

۱۔ ایک لا نما نلی کے نچلے حصہ میں پارہ پڑا ہے، اگر پارہ کی کثافت اضافی ۶ء۱۳ ہو تو بتاؤ کہ نلی کی ایک شاخ میں کتنے انچ کی بلندی تک پانی ڈالا جائے کہ پارہ دوسری شاخ میں ایک انچ اور اوپر چڑھ جائے۔

۲۔ ایک لا نما نلی کی ہر ایک شاخ ۸ انچ لمبی ہے، نلی کی دونوں شاخیں آدھی پانی سے بھر دی گئی ہیں، تب ایک شاخ میں اتنا تیل ڈالا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے، اگر تیل کی کثافت اضافی $\frac{۲}{۳}$ ہو تو معلوم کرو کہ نلی کے کتنے طول میں تیل ہے۔

۳۔ ایک یکساں خمدار نلی کی دو شاخیں انتصابی ہیں اور نلی کا جو حصہ ان شاخوں کے نچلے سروں کو ملاتا ہے وہ متوازی الافق ہے اور اس کا طول ۲ انچ ہے۔ نلی میں اتنا پانی ڈالا گیا ہے کہ وہ نلی کو ۶ انچ تک بھر دیتا ہے اور پھر ایک شاخ میں اتنا تیل ڈالا گیا ہے کہ تیل نلی کو ۵ انچ تک بھر دیتا ہے، اگر تیل کی اضافی کثافت $\frac{۴}{۵}$ ہو تو بتاؤ کہ تیل اور پانی کی مشترک سطح کہاں واقع ہوگی۔

۴۔ ایک لا نما نلی کے نچلے حصہ میں پارہ ہے، اس کی ایک شاخ میں ایک مائع ڈالا گیا ہے جو نلی کو ۸ انچ تک بھر دیتا ہے، اگر مائعات کے ارتفاعوں کا فرق ۷ انچ ہو اور پارہ کی کثافتِ اضافی ۶ء۱۳ ہو تو دوسرے مائع کی کثافتِ اضافی دریافت کرو۔

۵۔ دو انتصابی نلیوں کی جلیپی تراشوں کے رقبے بالترتیب ۱ اور ۱ء مربع انچ ہیں، ان کے نچلے سروں کو ایک نلی کے ذریعہ ملایا گیا ہے

گیا ہے، اس نلی میں اور نیز انتصابی نلیوں میں کچھ پارہ پڑا ہے جسکی کثافت اضافی ۵۹۶ء۱۳ ہے، بتاؤ کہ بڑی نلی میں کتنا پانی ڈالا جائے کہ چھوٹی نلی میں پارہ کی سطح ایک انچ اوپر چڑھ جائے۔

۶۔ ایک لانما نلی کی شاخوں کی تراشوں کے رقبے بالترتیب ۲ مربع سنتی میتر اور ایک مربع سنتی میتر ہیں، اس نلی کو انتصابی حالت میں رکھا گیا ہے، نلی کے اندر کچھ پارہ ڈالا گیا ہے جسکی کثافت ۶۵ء۱۳ ہے اور تب چوڑی شاخ میں ۵۲ مکعب سنتی میتر پانی ڈالا گیا ہے، بتاؤ کہ اس نلی میں پانی کے دباؤ کی وجہ سے پارہ کی سطح پہلے سے کتنی نیچی ہو جائے گی۔

۷۔ ایک لانما نلی کی شاخون کے طول برابر ہیں اور ہر ایک کی تراش کا رقبہ عہ ہے، نلی میں ک۱ کثافت کا ایک مائع ڈالا گیا ہے، ایک شاخ مائع کی سطح پر ک۲ (< ک۱) کثافت کا ایک ٹھوس جسم بلا تکلیف تیر رہا ہے جس کا حجم عہ ب ہے، دوسری شاخ کا وہ طول جس میں مائع نہیں ہے ج ہے، تب اس شاخ کو جس کے اندر ٹھوس جسم تیر رہا ہے ک۳ (< ک۲) کثافت والے ایک اور سیال سے بھر دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ دوسری شاخ کا وہ طول جس میں ابھی تک مائع نہیں ہے

$$ب \frac{ک_۳(ک_۱ - ک_۲)}{ک_۱(۲ک_۱ - ک_۲)} + ۲ج \frac{ک_۱ - ک_۳}{۲ک_۱ - ک_۲}$$ ہے

ہیئر کا مائع پیما — اس میں دو انتصابی نلیاں ہوتی ہیں جن کو ایک افقی نلی (ق) کے ذریعہ ملا دیا جاتا ہے اور ق کے

ساتھ ایک اور چھوٹی نلی پیوستہ ہوتی ہے جس کے اندر ایک روک ڈاٹ لگی ہوتی ہے۔ انتصابی نلیوں کے سرے آن دو مائعات ا اور ب میں الگ الگ ڈبو دئے جاتے ہیں جنکی کثافتوں کا مقابلہ کرنا مقصود ہوتا ہے۔ دیکھو شکل ذیل

رکو کسی ہوا پمپ کے ساتھ ملانے سے یا محض چوسنے سے عمودی نلیوں کے اندر کی کچھ ہوا نکال لی جاتی ہے جس سے اندر کی ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ ؔ۲ سے کم ہوکر ؔ۲ ہو جاتا ہے۔ تب دونوں مائعات نلیوں میں ع اور ف کی بلندی تک چڑھ آتے ہیں۔

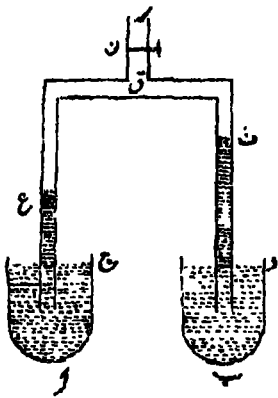
فرض کرو کہ مائعات کے برتنوں ا اور ب کے اندر مائعات کی سطحیں ج اور د پر ہیں۔ ج ع اور د ف کو ناپ لو۔

نیز فرض کرو کہ ا اور ب کے مائعات کی اضافی کثافتیں بالترتیب ض۱ اور ض۲ ہیں۔

دفعہ ۱۳۱ کی رُو سے

$$ ۲ = ۲ + و \times ض_۱ \times ج ع $$

اور $ ۲ = ۲ + و \times ض_۲ \times د ف $

یعنی $$ \frac{ض_۲}{ض_۱} = \frac{ج ع}{د ف} $$

جس سے دونوں مائعات کی اضافی کثافتوں کی نسبت معلوم ہو گئی۔

اگر ایک مائع کی کثافت اضافی ض۱ معلوم ہو مثلاً پانی کی تو ض۲

کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔
ظاہر ہے کہ ہیئر کے مائع پیما کا طریقہ اُلٹی لا نما نلی کے ذریعہ کثافت اضافی معلوم کرنا ہے۔

کثافت اضافی کی گولیاں ۔ کسی مائع کی کثافت اضافی دریافت کرنے کا ایک اور طریقہ بھی مستعمل ہے، شیشے کی چند گولیاں لیتے ہیں جن میں پارہ بھرا ہوتا ہے، پارہ کا وزن کم و بیش کرنے سے یہ گولیاں ایسی بنائی جاتی ہیں کہ خاص خاص گولیاں خاص خاص مائعات کے اندر عین تیر سکتی ہیں، جو گولی جس مائع میں تیرنے کے عین قابل ہو اس گولی پر اُس مائع کی کثافتِ اضافی درج ہوتی ہے۔ جس مائع کی کثافت اضافی دریافت کرنا مقصود ہوتا ہے اس کے اندر مختلف کثافتوں کی کئی ایسی گولیاں ڈال دیتے ہیں، ایسا کرنے سے بعض گولیاں بالکل تہ میں ڈوب جاتی ہیں اور بعض سطح پر تیرتی ہیں۔

اب اُن دو گولیوں کو لو جن میں سے ایک عین آہستہ سے ڈوب جائے اور دوسری وہ جو اس طرح تیرے کہ اس کا ذرا سا حصہ پانی کی سطح سے باہر رہے تب مائع زیر بحث کی اضافی کثافت تقریباً ان دو گولیوں کی کثافتوں کا اوسط ہوگی۔

۸۸ - دفعہ ۳ میں ہم بتا چکے ہیں کہ گیسوں اور مائعات میں بڑا ضروری فرق یہ ہے کہ مائعات کو دبا کر اُن کا حجم بظاہر ذرا بھی کم نہیں کر سکتے لیکن گیسوں کو دبا کر اُن کا حجم نہایت آسانی سے کم کیا جا سکتا ہے۔

کسی گیس کا دباؤ بھی اسی طرح سے ناپا جا سکتا ہے جس طرح کہ مائع کا، مائع کی صورت میں دباؤ اُس کے وزن اور نیز اس بیرونی دباؤ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جو کہ مائع پر ڈالا جائے لیکن گیس کی صورت میں دباؤ کا انحصار بالعموم صرف اُس بیرونی دباؤ پر ہوتا ہے جو کہ گیس پر عمل کر رہا ہو۔

۸۹ - ہوا دباؤ ڈالتی ہے۔ اس امر کی تصدیق کئی ایک تجربوں سے ہو سکتی ہے۔

(۱) اگر ہم ہوا کا ایک پھکنا ہوا پمپ کے قابلہ کے اندر رکھیں اور قابلہ کی ہوا خارج کریں تو پھکنے کے باہر کی ہوا کے دباؤ

کا مقابلہ اندر کی ہوا کا دباؤ نہیں کر سکے گا اور پھکنا پھولنا شروع کرے گا۔ اگر ہم ہوا کو بتدریج خارج کرتے جائیں تو پھکنا حجم میں بڑھتے بڑھتے بالآخر پھٹ جائے گا۔

(۲) اگر ہم شیشے کے ایک گلاس کو اوندھا کرکے پانی کے اندر دھکیلیں تو معلوم ہوگا کہ گلاس کے اندر پانی کی سطح باہر کے پانی کی سطح سے نیچی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ گلاس کے اندر کی ہوا پانی کو نیچے کی طرف دبا رہی ہے۔

(۳) اسی امر کے ثبوت کے لئے ایک اور تجربہ پہلے پہل میگڈی برگ کے نصف کروں کے ذریعہ سترھویں صدی عیسوی کے وسط میں کیا گیا تھا۔ دو مجوّف نصف کروں کو ایک دوسرے کے اوپر اچھی طرح چسپاں کر کے ہوا بند بنا دیا گیا۔ جوف کے اندر کی ہوا بذریعہ

ہوا پمپ خارج کی گئی، تب معلوم ہوا کہ ان نصف کروں کو علیحدہ کرنے کے لئے ایک بڑی قوت درکار ہوتی ہے اگر ان میں سے ہر ایک کا قطر ایک فٹ ہو تو ان کو علیحدہ کرنے کے لئے جو قوت لگانی پڑے گی وہ ۱۶۰۰ پونڈ وزن سے زیادہ ہو گی۔

۹۰ - **ہوا وزن رکھتی ہے۔** اس امر کو تجربی طریق پر ذیل کے طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے ایک شیشے کا مجوّف کرہ لو جس میں ایک روک ڈاٹ لگی ہوئی ہو۔ ہوا پمپ (دفعہ ۱۳۷) سے یا کسی دوسرے ذریعہ سے اس کے اندر کی ہوا خارج کرکے اس کو اچھی طرح تول لو۔

اب ڈاٹ کو کھول دو تاکہ اس کے اندر ہوا چلی جائے اور اندر کی ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہو جائے۔ اس کو پھر اچھی طرح سے تولو۔

معلوم ہوگا کہ دوسری صورت میں کرہ کا وزن پہلی صورت کی نسبت زیادہ ہے۔ اور وزن کی یہ زیادتی ہوا کے وزن کی وجہ سے ہے۔ ہوا کی کثافتِ اضافی بلحاظ پانی کے ۰۰۱۲۹۳ء معلوم کی گئی ہے یعنی ہوا کے ایک مکعب فٹ کا وزن قریباً ۲۹۳ء۱ اونس ہوتا ہے۔

اس لئے پارہ کے ۷۶ سنتی میتر کے دباؤ پر خشک ہوا کی کثافت ۰۰۱۲۹۳ء گرام فی مکعب سنتی میتر ہوتی ہے۔

$$۰۰۱۲۹۳ء = \frac{۱}{۷۷۳} \text{ تقریباً}$$

۹۱ - اسی طریقہ سے بتایا جا سکتا ہے کہ اور گیسیں بھی وزن رکھتی ہیں اور دباؤ ڈالتی ہیں۔

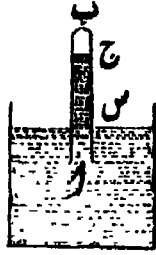
ذیل میں چند مشہور گیسوں کی اضافی کثافتیں ۰ سنتی گریڈ تپش اور پارہ کے ۷۶ سنتی میتر کے دباؤ پر درج کی گئی ہیں۔

ہوا	۰۰۱۲۹۳ء
آکسیجن	۰۰۱۴۳۰ء
ہائیڈروجن	۰۰۰۰۸۹ء
نائٹروجن	۰۰۱۲۵۶ء
کاربانک ایسڈگیس	۰۰۱۹۷۷ء

اس سے ظاہر ہے کہ ہائیڈروجن ہوا کی نسبت تقریباً ۱۴ گنا ہلکی ہوتی ہے ۔ اس لئے غباروں میں بھرنے کے لئے اس گیس کو استعمال کرتے ہیں ۔

کاربانک ایسڈگیس ہوا کی نسبت بہت بھاری ہوتی ہے اور اس کو مائع کی طرح ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈال سکتے ہیں ۔

۹۲ ۔ کرۂ ہوائی کا دباؤ ۔

شیشہ کی تین یا چار فٹ لمبی ایک نلی لو جس کا ایک سرا ا کھلا ہو اور دوسرا سرا ب بند ہو ۔ اسکو احتیاط کے ساتھ پارہ سے بھرو اور اس کا کھلا سرا ا انگلی سے بند کرلو پھر نلی کو الٹا کرکے اس کا کھلا سرا ایک ایسے برتن کے اندر ڈبو دو جس میں کرۂ ہوائی کے دباؤ پر کچھ پارہ پڑا ہو ۔ نلی کو انتصابی سمت میں رکھو تب معلوم ہوگا کہ نلی کے اندر کا پارہ کچھ نیچے اتر آیا ہے اور اس کی سطح ایک ایسے نقطہ ج پر آکر ٹھہر گئی ہے جس کی بلندی برتن کے پارہ کی سطح س سے تقریباً ۲۹ یا ۳۰

انچ ہے۔
آسانی کے لئے فرض کرو کہ
یہ ارتفاع ۳۰ انچ ہے۔
اب نلی کے تعین اندر س پر
کے ایک مربع انچ پر جو دباؤ
ہے وہ اُس پارہ کے وزن کے مساوی ہے جو اس مربع انچ کے اوپر ۳۰ انچ تک قائم ہو۔
نیز نلی کے اندر س پر جو دباؤ ہے وہ اُس دباؤ کے مساوی ہے جو باہر کے پارہ کی سطح پر ہے اور آخر الذکر دباؤ کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اس لئے ثابت ہوا کہ کرہ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ۳۰ انچ اونچے ستون کے وزن کے مساوی ہے۔
یہ تجربہ بالعموم طریسیلی کے تجربہ کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے اور نلی کے اندر ج کے اوپر جو خلا ہے اسکو اکثر خلائے طریسیلی کہتے ہیں۔
اگر نلی کے اندر پارہ کے ستون کے ارتفاع کو بغور دیکھتے رہیں تو معلوم ہوگا کہ یہ ہمیشہ بدلتا رہتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کرۂ ہوائی کے دباؤ میں ہمیشہ تغیر واقع ہوتا رہتا ہے' یہ دباؤ بالعموم کم ہوتا ہے جب کرہ ہوائی کے اندر بخار کی زیادہ مقدار موجود ہو۔
(۹۳)۔ اگر س ج کی بلندی معلوم ہو تو ہم کرۂ ہوائی کے دباؤ کو اس طرح بھی بیان کرسکتے ہیں کہ یہ اتنے پونڈ وزن فی مربع فٹ یا فی مربع انچ کے مساوی ہے۔

چونکہ خالص پارہ کی کثافت پانی کی کثافت سے ۱۳٫۵۹۶ گنی ہوتی ہے اس لئے ثابت ہوا کہ پارہ کی کثافت فی مکعب فٹ ۱۳۵۹۶ اونس ہے، اگر ستون س ج کی بلندی ۳۰ انچ ہو تو کرۂ ہوائی کا دباؤ فی مربع انچ

= پارہ کے ۳۰ مکعب انچ کا وزن

$$= ۳۰ \times \frac{۱۳۵۹۶}{۱۷۲۸ \times ۱۶}$$ پونڈ وزن

= ۱۴٫۷۵.... پونڈ وزن

اسی طرح سے سنتی میٹر گرام اکائیوں میں اگر ستون کی بلندی ۷۶ سنتی میٹر ہو تو کرۂ ہوائی کا دباؤ فی مربع سنتی میٹر

= ۷۶ مکعب سنتی میٹر پارہ کا وزن

= ۱۳٫۵۹۶ × ۷۶ مکعب سنتی میٹر پانی کا وزن

= ۱۳٫۵۹۶ × ۷۶ گرام وزن

= ۱۰۳۳٫۲۹۶ گرام وزن

= ۱۰۱۳۶۶۳٫۳۷۶ ڈائن

۹۴- کرۂ ہوائی کا معیاری دباؤ- کرۂ ہوائی کا وہ دباؤ جس کی وجہ سے ۰° سنتی گرید کی تپش پر بارپیما کے ستون کی بلندی ۷۶ سنتی میٹر ہو کرۂ ہوائی کا معیاری یا طبعی دباؤ کہلاتا ہے دفعہ گذشتہ میں بتایا جا چکا ہے کہ یہ دباؤ فی مربع سنتی میٹر ۱۰۱۳۶۶۳ ڈائن کے مساوی ہوتا ہے۔

انگلستان میں پارے کے ۳۰ انچ (= ۷۶٫۲ سنتی میٹر تقریباً)

اونچے ستون کا دباؤ کرۂ ہوائی کا معیاری دباؤ سمجھا جاتا ہے
اور یہ دباؤ ۱۴٫۷۵ پونڈ وزن فی مربع فٹ کے مساوی
ہوتا ہے۔

چونکہ یہ معیاری دباؤ پارہ کی ایک خاص مقدار کے وزن پر
موقوف ہے اس لئے (حسب دفعہ ۷۰ علم حرکت) ظاہر ہے کہ
زمین کی سطح کے سب مقامات پر یہ دباؤ یکساں نہیں ہوگا اس
تغیر کی بنا پر یہ تجویز پیش کی گئی ہے کہ ہمیشہ دس لاکھ ڈائن
(= ایک میگا ڈائن) فی مربع سنتی میتر کے دباؤ کو معیاری دباؤ
تصور کیا جائے۔ بارپیما کی جو بلندی اس دباؤ کو ظاہر کرتی ہے وہ

$$= \frac{1000000}{13.596 \times 981}$$ سنتی میتر = ۷۵ سمر تقریباً

بڑے بڑے دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کو اکائی مان کر اس کی رقوم میں بیان
کئے جاتے ہیں۔

۹۵۔ متجانس کرۂ ہوائی کی بلندی۔ کرۂ ہوائی کی کثافت اوپر تک
یکساں نہیں ہے، اگر کثافت یکساں ہوتی یعنی یہ متجانس ہوتا تو اسکی بلندی
نہایت آسانی سے محسوب ہوسکتی تھی تاہم اگر ایک متجانس کرۂ ہوائی ایسا
فرض کیا جائے جسکی کثافت ہر جگہ وہی ہو جو اصلی کرۂ ہوائی کی
سطح زمین پر ہے اور جو سطح زمین پر اتنا ہی دباؤ ڈالے جو
اصلی کرۂ ہوائی ڈالتا ہے تو اس مفروضہ کرۂ ہوائی کی بلندی
متجانس کرۂ ہوائی کی بلندی کہلاتی ہے۔

ہوا کی کثافت اضافی تقریباً ۰۰۱۳ء ہے یعنی ہوا کے ایک مکعب

فٹ کا وزن = پانی کے ایک مکعب فٹ کے وزن کا ۰۰۱۲ء گنا
= ۰۰۱۳ء × ۱۳ × ۶۲ $\frac{1}{2}$ پونڈ وزن تقریباً
اگر متجانس کرۂ ہوائی کی مطلوبہ بلندی فا فٹ ہو تو فا × ہوا کی کثافت = پارہ کے بارپیا کی بلندی × پارہ کی کثافت

∴ فا = $\frac{\text{پارہ کی کثافت}}{\text{ہوا کی کثافت}}$ × پارہ کے بارپیا کی بلندی

= $\frac{13.596}{.0013} \times \frac{30}{12}$ فٹ
= ۲۶۱۴۶ فٹ تقریباً
= ۵ میل تقریباً

پس اگر کرۂ ہوائی کی کثافت ہر بلندی پر وہی رہتی جو سطح زمین پر ہے اور اس کی بلندی ۵ میل ہوتی تو ایسا کرۂ ہوائی سطح زمین کے کسی نقطہ پر تقریباً وہی دباؤ ڈالتا جو اصلی کرۂ ہوائی فی الواقع ڈالتا ہے۔

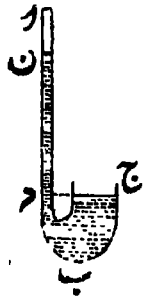
۹۶ - بارپیا۔ بارپیا ایک آلہ ہوتا ہے جس سے ہوا کا دباؤ ناپا جاتا ہے۔ اس کی سادہ ترین صورت میں دیکھو دفعہ ۹۲ یہ ایک نلی اور ایک ظرف پر مشتمل ہوتا ہے جس کے اندر کوئی مائع بھرا ہوتا ہے، کرۂ ہوائی کا دباؤ نلی کے اندر اس مائع کو سہارے رہتا ہے، ظرف کے مائع کی سطح کے اوپر نلی کے اندر مائع کی جو بلندی ہو اُس سے یہ دباؤ ناپا جاتا ہے۔

مائع جو استعمال کیا جاتا ہے وہ بالعموم پارہ ہوتا ہے کیونکہ اس کی کثافت مقابلۃً بہت زیادہ ہے' کبھی کبھی گلسرین بھی استعمال کی جاتی ہے۔

پارے کے بارپیما کی بلندی عام طور پر ۲۹ اور ۳۰ انچ کے درمیان ہوتی ہے۔

اگر پارہ کی بجائے پانی استعمال کیا جائے تو بلندی' تقریباً ۳۳ سے ۳۴ فٹ تک ہوگی۔

۹۷- سیفنی بارپیما۔ عام طور پر جو بارپیما استعمال میں آتا ہے اس کی شکل ایک خمدار نلی اد ب ج کی سی ہوتی ہے' نلی کی لمبی شاخ ا د کا قطر نلی کی چھوٹی شاخ ب ج کے قطر سے مقابلۃً بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ استعمال کے وقت اس کو اس طرح رکھا جاتا ہے کہ نلی کی دونوں شاخیں انتصابی سمت میں رہیں۔

چھوٹی شاخ کا سرا ہوا میں کھلا رہتا ہے اور لمبی شاخ کا سرا ا بند ہوتا ہے' لمبی شاخ کا طول عموماً ۳۰ فٹ رکھتے ہوئے نلی کے اندر پارہ بھر دیا جاتا ہے اور لمبی شاخ میں پارہ کے اوپر خلا ہوتا ہے۔ جب لمبی شاخ میں پارہ کی ہمواری ن پر ہو اور چھوٹی شاخ میں ج پر' تو ہوا کا دباؤ پارہ کے اُس ستون کے وزن کے مساوی

ہوتا ہے جس کی بلندی ج اور ن کے انتصابی فاصلے کے برابر ہو یعنی جس کی بلندی ن د کے برابر ہو جہاں نقطہ د لمبی شاخ میں ج کی ہمواری پر واقع ہے۔

چونکہ ن کے اوپر خلا ہے اس لئے د پر کا دباؤ پارہ کے اُس ستون کے وزن کے مساوی ہے جس کی بلندی ن د ہے۔

نیز چونکہ ج اور د ایک ہی ہمواری پر واقع ہیں اس لئے د پر کا دباؤ ج پر کے دباؤ کے مساوی ہے اور ظاہر ہے کہ ج پر کا دباؤ کرۂ ہوائی کا دباؤ ہے۔ لہٰذا ثابت ہوا کہ کرۂ ہوائی کا دباؤ ستون د ن کے وزن کے مساوی ہے۔

نلی د ن پر متساوی الفصل نشان لگے ہوتے ہیں جن کو پڑھنے سے بارپیما کا ارتفاع آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے۔

۹۸۔ **بارپیما کی درجہ بندی**۔ کسی بارپیما کی درجہ بندی کرنے میں ایک ضروری بات کو ہمیشہ ملحوظ رکھنا پڑتا ہے اور وہ یہ ہے کہ جب حصہ ب ا میں پارہ اوپر چڑھتا ہے تو ب ج میں نیچے اتر جاتا ہے اور بارپیما کے ستون کی مطلوبہ بلندی ہمیشہ ان دو ہمواریوں کے فرق سے تعبیر ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ شاخ ب ا کی تراش یکساں ہے اور ۱/۲ مربع انچ کے مساوی ہے اور چوڑی نلی کی تراش کا رقبہ مقام ج کے قریب ایک مربع انچ ہے۔

نیز فرض کرو کہ لمبی نلی میں پارہ بظاہر ایک انچ اوپر چڑھ گیا ہے، چونکہ اس نلی کے اندر پارہ کا جو حجم بڑھ جائے گا اس کے جواب میں چوڑی نلی کے اندر پارہ کا اتنا ہی حجم کم ہوجائے گا اس لئے ظاہر ہے کہ چوڑی نلی میں پارہ $\frac{۱}{۱۰}$ انچ نیچے اتر جائیگا۔

پس ان دو ہمواریوں کا درمیانی فاصلہ بقدر $(۱+\frac{۱}{۱۰})$ یعنی $\frac{۱۱}{۱۰}$ انچ کے بڑھ گیا ہے، یعنی اگر پارہ کی بلندی میں بظاہر ایک انچ کا اضافہ ہو تو یہ فی الحقیقت $\frac{۱۱}{۱۰}$ انچ کی زیادتی کو تعبیر کرتا ہے۔

پس $\frac{۱۰}{۱۱}$ انچ کی ظاہری زیادتی ایک انچ کی حقیقی زیادتی کو تعبیر کرتی ہے۔

بار بار اس قسم کی تصحیح کی زحمت سے بچنے کے لئے نلی ب ا کو ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول $\frac{۱۰}{۱۱}$ انچ ہوتا ہے اور ان پر درجے اس طرح لگا دئے جاتے ہیں گویا کہ یہ انچ ہیں۔

زیادہ عام طور پر فرض کرو کہ لمبی نلی کی عمودی تراش $ر_۱$ ہے اور چھوٹی نلی کی عمودی تراش $ر_۲$ ہے، نیز فرض کرو کہ $ر_۱$، $ر_۲$ دونوں مستقل ہیں۔

اگر لمبی نلی میں پارہ کی سطح فاصلہ لا اوپر چڑھ جائے تو چھوٹی نلی میں پارہ کی سطح $\frac{ر_۱}{ر_۲}$ لا نیچے اتر آئیگی۔

یعنی اگر پارہ کے ستون کی بلندی میں ظاہری زیادتی لا ہو تو اس کے متناظر حقیقی زیادتی لا + $\frac{ر_۱}{ر_۲}$ لا یعنی $\frac{ر_۱+ر_۲}{ر_۲}$ لا ہوگی۔

اس لئے اس قسم کی تصحیح کا خیال کرتے ہوئے یہ ضروری ہے کہ لمبی نلی میں مسلسل درجوں کے حقیقی فاصلے اُن مفروضہ فاصلوں سے جو نلی پر منقوش ہوتے ہیں نسبت $ل_2 : ل_1 + ل_2$ سے کم ہوں۔

لیکن اگر بارپیما کی درجہ بندی اس طرح سے نہ کی جائے اور نشانات کے درمیانی فاصلوں کی قیمتیں ان کے اصلی مقداروں کے مطابق درج کی جائیں تو بارپیما کی اصلی بلندی معلوم کرنے کے لئے ضرور ہے کہ ظاہری بلندی کو ہر صورت میں مقدار $1 + \frac{ل_1}{ل_2}$ سے ضرب دیا جائے۔ ایسا کرنے کو "تصحیح بوجہ گنجائش حوض" کہتے ہیں۔

۹۹- تصحیح بوجہ تپش - پارہ حرارت سے پھیلتا ہے اور پھیلنے سے اس کی کثافت کم ہو جاتی ہے۔ علاوہ ازیں جس سلاخ سے پارہ کی ظاہری بلندی ناپی جاتی ہے اور جو بالعموم پیتل کی بنی ہوتی ہے وہ بھی حرارت سے پھیلتی ہے۔ اس لئے تپش کی تصحیح ضروری ہے۔ اس غرض سے کوئی معیاری تپش مقرر کرلینی چاہیئے کیونکہ ظاہر ہے کہ تپش جس قدر زیادہ ہوگی پارے کے ایک خاص طول کا وزن اسی قدر کم ہوگا۔ پانی کے نقطۂ انجماد کو بالعموم یہ معیاری تپش قرار دیتے ہیں۔

فرض کرو کہ تپش ت° سنٹی گرید پر پارہ کی ظاہری بلندی ف ہے اور ۰° سنٹی گرید پر متناظر بلندی $ف_0$ ہے۔

اگر پارہ کے پھیلاؤ کی قدر فی درجہ سنٹی گرید ع ہو (ع = ۰۰۰۱۸ء تقریباً) تو

$$ف_0 \left[1 + ع\,ت\right] = ف$$

∴ ف‌ب = ف / (۱+عہ ت)

= ف (۱+عہ ت)$^{-1}$

اب چونکہ عہ بہت چھوٹا ہے اس لئے مسئلہ ثنائی سے یہ

= ف (۱-عہ ت) تقریباً

نیز اگر پیمانہ کے نشانات °۰ سنٹی گرید پر اصلی انچوں کو تعبیر کریں اور پیمانہ کے خطی پھیلاؤ کی قدر بہ ہو تو ع ظاہری انچ درحقیقت ت° سنٹی گرید پر ف (۱+بہ ت) انچوں کو تعبیر کرینگے۔

∴ ف‌ب = (۱-عہ ت) ظاہری انچ

= ف (۱+بہ ت) (۱-عہ ت) اصلی انچ

اب بہ قلیل کی صورت میں یہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اور تقریباً ۰۰۰۰۱۹ء کے مساوی ہوتا ہے۔

∴ ف‌ب = ف [۱-(عہ-بہ) ت-عہ بہ ت^{2}]

= ف [۱-(عہ-بہ) ت] تقریباً

نیز عہ-بہ = ۰۰۰۱۸ء-۰۰۰۰۱۹ء

= ۰۰۰۱۶ء تقریباً

∴ ف‌ب = ف - ۰۰۰۱۶ء × ف ت

لہذا ظاہری ارتفاع ف میں سے ایک قلیل مقدار

۰۰۰۱۶ء × ف × ت

تفریق کرنی چاہیئے۔

اسی طرح سے یہ بآسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ فادن ہیت کے تپش پیما کی رو سے اگر درجۂ تپش ت ہو تو مقدار

ء۰۰۰۹ × (ت − ۳۲) ف تفریق کرنی پڑیگی۔

اس مقدار کی قیمت بذریعہ جداول معلوم ہوتی ہے جن میں تپش اور بارپیما کی بلندی دونوں کی معمولی قیمتوں کے لئے اس مقدار کی عددی قیمتیں مندرج ہوتی ہیں۔

۱۰۰۔ تصحیح جاذبۂ ارض کے غیر مساوی اشتداد کی بنا پر۔

جب زمین کے کسی وسیع رقبہ پر بارپیما کے ارتفاعوں کا مشاہدہ کیا جائے تو ان کا باہم مقابلہ کرنے سے پہلے اُن میں جاذبۂ ارض کے غیر مساوی اشتداد کی بنا پر تصحیح کرلینا ضروری ہے۔ اس غرض سے بالعموم اِن مشاہدات کو جاذبۂ ارض کی اس قیمت کی رقوم میں تحویل کرلیتے ہیں جو کہ عرض بلد ۴۵° میں سطح سمندر پر ہوتی ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

ج = ج. [۱ − ۰۰۲۵۷ء۰ جم ۲ لہ − ۱ء۹۶ ف × ۱۰^-۹]

یہاں ج سے مراد اُس مقام پر کی جاذبۂ ارض ہے جس کا عرض بلد لہ ہے اور جسکی بلندی سطح سمندر سے ف سنتی میٹر ہے اور ج. عرض بلد ۴۵° درجہ میں سطح سمندر پر جاذبۂ ارض کو تعبیر کرتا ہے۔

پس یہ معلوم کرنے کے لئے کہ بارپیما کا ارتفاع ۴۵° عرض بلد میں سطح سمندر پر کیا ہوگا ہمیں مشاہدہ کردہ ارتفاع کو

۱ − ۰۰۲۵۷ء۰ جم ۲ لہ − ۱ء۹۶ × ف × ۱۰^-۹ سے

ضرب دینا چاہئے۔

۱۰۱۔ ان کے علاوہ بعض اوقات شعریت اور بخاری دباؤ کی

بنا پر بھی تصحیح کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔

شعریت کی وجہ سے نلی میں پارہ کی سطح ہموار نہیں رہتی بلکہ محدّب ہوتی ہے۔

نلی کے اندر جو پارہ ہے اس میں سے کسی نہ کسی مقدار میں بخارات نکلتے رہتے ہیں جن کا میلان پارے کے ستون کو نیچے دبانے کی جانب ہوتا ہے۔

لیکن غلطی واقع ہونے کے یہ دونوں اسباب پارہ کے بارپیما کی صورت میں بہت کم وقعت رکھتے ہیں۔

پانی کے بارپیما کی صورت میں بخاری دباؤ نسبتاً زیادہ قابلِ لحاظ ہوتا ہے۔

۱۰۲۔ بے مائع بارپیما۔ اس بارپیما میں پارہ یا کسی اور سیّال کا کوئی ستون استعمال نہیں کیا جاتا۔ یہ آلہ محض ایک ہوابند بکس یا صندوقچہ پر مشتمل ہوتا ہے جس کے اندر کی ہوا کا کچھ حصہ خارج کیا ہوا ہوتا ہے۔ اس صندوق پر دھات کا بنا ہوا ایک پتلا ڈھکنا ہوتا ہے جس کی حرکت سے کرۂ ہوائی کا دباؤ معلوم ہوتا ہے، ڈھکنے کی اس حرکت کو جو درحقیقت نہایت خفیف ہوتی ہے دو بیرموں کی مدد سے مضاعف کرکے ایک ڈائل پر سوئی کے ذریعہ نمایاں طور پر دکھایا جاتا ہے۔ اِس آلہ کی درجہ بندی پارہ کے ایک معیاری بارپیما کے ساتھ اِس کا مقابلہ کرنے سے کی جاتی ہے۔

بے مائع بارپیما بہت چھوٹا اور ہلکا بنایا جا سکتا ہے۔ اس میں خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کو ایک جگہ سے دوسری جگہ آسانی سے لے جا سکتے ہیں لیکن یہ ضرور ہے کہ اس میں وہ صحت میسر نہیں آتی جو پارہ کے بارپیما میں ہے۔

امثلہ نمبری ۲۱

۱۔ ایک کان کے تلے پر پارہ کا بارپیما ۷۶ء۴ سنتی میتر پہ ہے، بتاؤ کہ اسی جگہ پر تیل کے ایک بارپیما کی بلندی کیا ہوگی جبکہ پارہ اور تیل کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۱۳٫۵۹۶ اور ۹ء۰ ہوں۔

۲۔ پانی کے بارپیما کی بلندی ۱۰۳۳ سنتی میتر ہے، اگر ۷ سنتی میتر نصف قطر کے ایک مستدیر قرص کو پانی کے اندر ۵۰ میتر کی گہرائی تک ڈبویا جائے تو قرص پر کا مجموعی دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ جب پارہ کا بارپیما ۳۰ انچ پر ہو تو گلسرین بارپیما کی نلی میں ۲۶ فٹ تک چڑھ سکتی ہے۔ اگر پارہ کی کثافت اضافی ۱۳٫۶ ہو تو گلسرین کی کثافت اضافی معلوم کرو۔

اگر بارپیما کی نلی کے اندر پارہ کی سطح پر لوہے کی ایک گولی تیرائی جائے تو بتاؤ کہ پارہ کے ارتفاع پر اس کا کیا اثر پڑے گا؟

۴۔ ایک سیمابی بارپیما کی نلی کا قطر ۱ سنتی میتر ہے اور حوض کا ۵ء۴ سنتی میتر، اگر نلی کے اندر پارہ کی سطح ۲٫۵ سنتی میتر اور اونچی ہو جائے تو دریافت کرو کہ بارپیما کی بلندی میں درحقیقت کیا تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

۵۔ ایک سیمابی بارپیما کی نلی کا قطر ½ انچ ہے اور حوض کا ½ انچ

اگر پارہ کی سطح ۱ انچ اور اونچی ہوجائے تو دریافت کرو کہ بارپیما کی بلندی میں درحقیقت کیا تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

۱۰۲۔ گیس کے دباؤ اور کثافت کا باہمی تعلق۔ یہ آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ جب کسی گیس پر کا دباؤ بدلتا ہے تو اس کی کثافت بھی بدلتی ہے۔

شیشہ کا ایک معمولی گلاس لو اور اس کو اوندہا کر کے پانی کے اندر عموداً دھکیلو جوں جوں گلاس پانی کے اندر غرق ہوتا جائیگا پانی گلاس کے اندر اوپر چڑھتا آئے گا۔ اس سے ظاہر ہے کہ اس عمل سے ہوا کا حجم کم ہوتا جاتا ہے۔ اب گلاس کے اندر کی ہوا کا دباؤ اس پانی کے دباؤ کے مساوی ہے جس کو یہ مس کرتی ہے اور صریحاً یہ دباؤ پانی کی سطح پر کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ نیز چونکہ موخرالذکر دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہے جو ابتداءً گلاس کے اندر کی ہوا کا دباؤ تھا اس لئے ثابت ہوا کہ جب ہوا کے حجم کو کم کیا جاتا ہے تو اس کا دباؤ بڑھ جاتا ہے۔

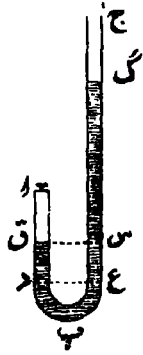
اب ایک لڑکے کی ہوائی بندوق پر غور کرو۔ گولی باہر نکالنے کے لئے لڑکا تیزی سے بندوق کے نشارہ کو آگے کی طرف دھکیلتا ہے اور اس عمل سے ہوا کے حجم کو کافی طور پر کم کردیتا ہے۔ چونکہ گولی ایک خاص رفتار کے ساتھ نکلتی ہے اس لئے ثابت ہوا کہ ہوا کے حجم کے کم ہونے سے اس کا دباؤ ضرور بڑھ گیا ہوگا۔

ایک اور مثال لو۔ ایک پھکنے کا منہ جس کے اندر کچھ ہوا ہو اسطرح بند کرو کہ یہ ہوا باہر نہ نکل سکے۔ پھکنے کو ایک ہوا پمپ کے اندر رکھکر رفتہ رفتہ بلہ کی ہوا خارج کرو۔ جوں جوں ہوا خارج ہوتی جاتی ہے پھکنے پر کا دباؤ کم ہوتا جاتا ہے۔ اس لئے اس کے اندر کی ہوا پر بھی دباؤ کم ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے یہ پھیلنا شروع کرتی ہے اور پھکنا حجم میں بڑھتا جاتا ہے۔

گیس کے حجم اور دباؤ کا باہمی ربط ایک کلیہ سے ظاہر ہوتا ہے جو تجربہ سے حاصل کیا گیا ہے، اس کلیہ کو **بائل کا کلیہ** کہتے ہیں۔ وہ یہ ہے:-

کسی گیس کی ایک دی ہوئی مقدار کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس متناسب ہوتا ہے بشرطیکہ اسکی تپش میں تبدیلی واقع نہو

یہ کلیہ بر اعظم یورپ میں بالعموم میری اوٹ کے کلیہ سے موسوم ہوتا ہے۔

۱۰۴- ہوا کی صورت میں اس کلیہ کی تصدیق تجربی طور پر یوں ہوسکتی ہے'ا ب ج ایک خمدار نلی ہے جس کا سوراخ یکساں ہے اور جس کے بازو ب ا اور ب ج سیدھے ہیں۔ بازو ب ج' ب ا کی نسبت بہت لمبا ہوتا ہے او پر ایک چھوٹا پیچ یا ٹوپی ہوتی ہے جس کو بوقت ضرورت لگا کر نلی ب ا کو ہوا بند بنا دیا جاتا ہے سب سے پہلے اس ٹوپی یا پیچ کو نکال لو اور ج میں سے نلی کے اندر

اتنا پارہ ڈالو کہ دونوں نلیوں میں یہ مساوی ہمواری پر ہو۔ فرض کرو کہ ان نلیوں میں اس کی سطح بالترتیب د اور ع ہے۔ ڈھکنے کو کس کر بند کردو۔ ایسا کرنے سے ہوا کی کچھ مقدار کرۂ ہوائی کے دباؤ پر نلی میں بند ہوجائے گی۔

ج میں سے اتنا پارہ ڈالو کہ لمبے بازو میں پارہ کی بلندی گ پر آجائے۔ تب چھوٹے بازو میں پارہ کی بلندی کسی نقطہ ق تک پہنچیگی جو نقطہ گ سے بہت نیچے ہوگا۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چھوٹے بازو کے اندر کی ہوا حجم میں کم ہوگئی ہے۔

فرض کرو کہ پارہ کے بارپیما کا ارتفاع اس وقت ف ہے اور نقطہ ق کی ہمواری پر بڑے بازو میں ایک نقطہ س ہے۔

تب بند ہوا کا دباؤ

= نقطہ ق پر کا دباؤ

= نقطہ س پر کا دباؤ

= ستون س گ کا وزن + گ پر کا دباؤ

= ستون س گ کا وزن + ستون ف کا وزن

= ستون (س گ + ف) کا وزن

$$\therefore \frac{\text{آخری دباؤ}}{\text{ابتدائی دباؤ}} = \frac{\text{ستون (س گ + ف) کا وزن}}{\text{ستون ف کا وزن}}$$

$$= \frac{\text{س گ + ف}}{\text{ف}}$$

$$\text{نیز } \frac{\text{ہوا کا ابتدائی حجم}}{\text{ہوا کا آخری حجم}} = \frac{\text{د ا}}{\text{ق ا}}$$

پیمائش کا عمل احتیاط کے ساتھ کرنے سے ازروئے تجربہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{س گ + ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{د ا}}{\text{ق ا}}$$

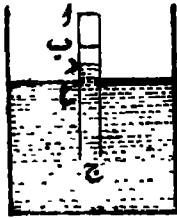
$$\therefore \frac{\text{آخری دباؤ}}{\text{ابتدائی دباؤ}} = \frac{\text{ابتدائی حجم}}{\text{آخری حجم}}$$

$$\therefore \text{آخری دباؤ} : \text{ابتدائی دباؤ} = \frac{1}{\text{آخری حجم}} : \frac{1}{\text{ابتدائی حجم}}$$

اس طرح سے حجم کی کمی کے متعلق کُلیہ مذکور ثابت ہوگیا۔

۱۰۵۔ ہوا کے پھیلاؤ کے متعلق بائل کا کُلیہ حسب ذیل

طریقہ سے ثابت ہوسکتا ہے۔

ایک برتن میں کچھ پارہ ڈالو اور ایک نلی اج ایسی لو جس کے اندر کچھ پارہ ہو اور جس کا سرا ج کھلا ہو۔ نلی کو پارہ کے اندر اس طرح غرق کرو کہ اس کا محل انتصابی رہے اور اس کا کھلا سرا ج برتن میں پارہ کی سطح کے اندر ڈوبا رہے۔ اولاً نلی کو اس طرح رکھو کہ پارہ کی سطح نلی کے اندر اور باہر برابر رہے۔ فرض کرو کہ نلی کا وہ نقطہ جو اب پارہ کی سطح میں واقع ہے ب ہے، بنا بریں نلی کے اندر کی بند ہوا کرہ ہوائی کے دباؤ پر طول اب گھیرتی ہے۔

نلی کو کچھ فاصلہ تک پارہ کے باہر اٹھاؤ۔ معلوم ہوگا کہ اندر کی ہوا پھیل گئی ہے اور پارہ نلی کے اندر اوپر اٹھ آیا ہے۔ فرض کرو کہ اب پارہ اور بند ہوا کی مشترک سطح د پر ہے۔

اگر تجربہ کرتے وقت پارہ کے بارپیما کا ارتفاع ف ہو تو نلی کے اندر کی ہوا کا ابتدائی دباؤ ج ک ف تھا۔ جہاں ک پارہ کی کثافت ہے اور ج جاذبہ ارض، لیکن نلی کو اوپر اٹھانے کے بعد اندر کی ہوا کا دباؤ وہی ہے جو پارہ کا د پر ہے اور یہ دباؤ = ع پر کا دباؤ۔ ج × ک × دع = ج ک (ف۔دع)

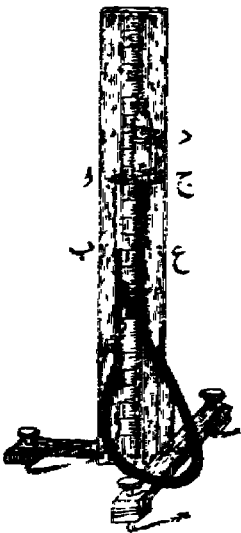
نیز ابتدائی اور آخری حجم بالترتیب ا ب اور ا د کے مساوی ہیں پیمائش کا عمل احتیاط کے ساتھ کرنے سے یہ تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف} - \text{دع}}{\text{ف}} = \frac{\text{اب}}{\text{اد}}$$

یعنی

$$\frac{\text{آخری دباؤ}}{\text{ابتدائی دباؤ}} = \frac{\text{ابتدائی حجم}}{\text{آخری حجم}}$$

۱۰۶- بائل کا کلیہ ذیل کے طریقہ سے بھی ثابت ہوتا ہے۔ جو دراصل دفعہ ۱۰۴ کے طریقہ کی ترمیم شدہ صورت ہے۔ ہوا کے حجم کی کمی یا زیادتی دونوں پر اس طریقہ کا یکساں اطلاق ہوسکتا ہے۔

ا ب اور ج د دو شیشے کی نلیاں ہیں جو ربڑ کی لچکدار نلی کے ایک ٹکڑے سے باہم ملحق کردی گئی ہیں۔ یہ نلیاں لکڑی کے ایک انتصابی قالب کے ساتھ لگادی گئی ہیں۔ ا ب کا اوپر کا سرا بند ہے لیکن ج د کے اوپر کا سرا کھلا ہے قالب کے ساتھ ایک انتصابی پیمانہ نصب کیا ہوا ہے اور ج د انتصابی سمت میں اس پیمانہ کے متوازی حرکت کرسکتا ہے۔ ربڑ کی نلی اور شیشے کی نلیوں کے نچلے حصہ میں پارہ بھر دیا جاتا ہے نلی ا ب کے اوپر کے حصہ میں ہوا ہے جس کا دباؤ کسی خاص

وقت میں ف+ع د سے تعبیر ہوتا ہے۔ جہاں نقطہ ع کی بلندی وہی ہے جو ب کی ہے اور ف بارہ کے بارپیما کا ارتفاع ہے، نلی ج د کو اوپر نیچے حرکت دینے سے معلوم ہوگا کہ ہر حالت میں

$$\text{ا ب} \propto \frac{1}{\text{ف + ع د}}$$

$$\text{یعنی حجم} \propto \frac{1}{\text{دباؤ}}$$

۱۰۷- قریب قریب زمانۂ حال تک یہی خیال کیا جاتا رہا کہ بائل کا کلیہ بدرجۂ اتم صحیح ہے قابل اعتبار اور صحیح تجربوں کی بنا پر اب یہ معلوم ہوا ہے کہ تمام گیسوں کے لئے یہ کلیہ پورے طور پر صحیح نہیں۔ بایں ہمہ اس کلیہ کو اُن گیسوں کے لئے جن کا مائع بنانا نہایت دشوار ہے (مثلاً ہوا۔ آکسیجن، ہائیڈروجن اور نائٹروجن) قریباً قریباً مکمل طور پر صحیح خیال کیا جاسکتا ہے، اکثر گیسیں اس شرح کی نسبت جو کلیہ مذکور کی رو سے ہونی چاہیئے زیادہ دب جاتی ہیں یہ تجربہ سے ثابت ہے کہ سوائے ہائیڈروجن کے باقی سب گیسوں میں جوں جوں دباؤ حدود اعتدال کے اندر بڑھتا جاتا ہے، حجم اور دباؤ کا حاصل ضرب کم ہوتا جاتا ہے اور گیس کی اماعت جس قدر آسان ہوتی ہے اسی قدر حاصل ضرب مذکورۂ بالا میں یہ کمی زیادہ نمایاں ہوتی ہے برعکس اس کے ہائیڈروجن کی صورت میں جوں جوں دباؤ بڑھتا جاتا ہے، حجم اور دباؤ کے حاصل ضرب میں بھی خفیف اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ جو گیس مکمل طور پر بائل کے کلیہ کے تابع ہو کامل گیس کہلاتی ہے۔

متذکرۂ بالا گیس تقریباً کامل گیس ہیں +

۱۰۸۔ فرض کرو کہ ابتداءً ایک خاص کمیت کی گیس کا دباؤ دَ، حجم حَ، اور کثافت کَ ہے۔ اب اگر اس کی تپش مستقل رہے اور دباؤ د پر اس کا حجم ح اور کثافت ک ہو جائے تو ازروئے کلیۂ بائل

$$\frac{حَ}{ح} = \frac{د}{دَ}$$

یعنی د ح = دَ حَ . . . . . . (۱)

نیز ک ح اور کَ حَ دونوں گیس مذکور کی کمیت کو تعبیر کرتے ہیں جو کہ مستقل رہتی ہے۔

∴ ک ح = کَ حَ . . . . . . (۲)

عمل تقسیم سے مساواتات (۱) اور (۲) سے

$$\frac{د}{ک} = \frac{دَ}{کَ}$$

پس د/ک کسی ایک گیس کی صورت میں ہمیشہ مستقل رہتا ہے فرض کرو کہ اس کی قیمت م کے مساوی ہے اس لئے

د = م ک

مشق۔ اگر یہ مان لیا جائے، کہ ہوا کی کثافت اضافی ۰۰۱۳، ہے، پارہ کی بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے، پارہ کی کثافت اضافی ۱۳۶۵۹۶ ہے اور ج کی قیمت ۳۲٫۲ ہے تو ثابت کرو کہ م کی قیمت فٹ ثانیہ اکائیوں میں تقریباً ۸۴۱۹۰۶ ہے۔

نیز س، گ، ث اکائیوں میں م کی قیمت دریافت کرو جبکہ ج، ۹۸۱ کے برابر ہو اور پارہ کے بارپیما کا ارتفاع ۷۶ سنتی میتر ہو۔

د = $\frac{۳۰}{۱۲}$ × ۱۳٫۵۹۶ × ج × $\frac{۱}{۲}$ ۶۲ پونڈل فی مربع فٹ

اور ک = ۶۰۰۱۳ × $\frac{۱}{۲}$ ۶۲ پونڈ

∴ م = $\frac{۳۰}{۱۲}$ × ۱۳٫۵۹۶ × ۳۲٫۲ × $\frac{۱}{٫۰۰۱۳}$

= $\frac{۱۰۹۴۴۷۸۰}{۱۲}$ = ۸۴۱۹۰۶ تقریباً

س، گ، ث نظام میں

د = ۷۶ × ۱۳٫۵۹۶ × ۹۸۱ ڈائن فی مربع سنتی میتر

اور ک = ٫۰۰۱۳ گرام فی مکعب سنتی میتر

∴ م = $\frac{۹۸۱ × ۱۳٫۵۹۶ × ۷۶}{۶۰۰۱۳}$ = $\frac{۹۸۱ × ۳۵۰۶۰ × ۷۶}{۱۳}$

= ۷۷۹۷۴۱۰۰۰ تقریباً

۱۰۹۔ مشق ۱۔ پارہ کی کثافت اضافی ۱۳٫۶ ہے اور اسکا بارپیما ۳۰ انچ ہے۔ گیس کے ایک بلبلے کا حجم ایک جھیل کی تہ پر جو ۱۷۰ فٹ گہری ہے ایک مکعب انچ ہے۔ بتاؤ کہ جب بلبلہ سطح پر آئے گا تو اسکا حجم کیا ہوگا

اگر پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن و ہو تو جھیل کی تہ پر دباؤ فی مربع فٹ

= ۱۷۰ و + ۱۳٫۶ × $\frac{۱}{۲}$۲ و

= ۲۰۴ و

نیز جھیل کی سطح پر دباؤ = ۱۳٫۶ × $\frac{۱}{۲}$۲ و = ۳۴ و

پس اگر حجم مطلوبہ لا ہو تو

لا × ۳۴ و = ۱ × ۲۰۴ و

∴ لا = ۲ مکعب انچ

مشق ۲- پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۰۰۰ اونس ہے، ہوا کے ایک مکعب فٹ کا وزن $1\frac{1}{4}$ اونس ہے، اگر آبی باریپا کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو تو بتاؤ کہ پانی کے نیچے کس گہرائی پر ہوا کا ایک بلبلہ ڈوب جائیگا۔

فرض کرو کہ گہرائی لا پر حباب مذکور عین تیر سکتا ہے۔ یہ صورت صرف اس وقت واقع ہوگی جبکہ اس گہرائی پر ہوا کی کثافت پانی کی کثافت کے عین برابر ہو۔ تب بائل کے کلیہ کی رو سے

$$\frac{\text{۳۴ + لا}}{\text{۳۴}} = \frac{\text{گہرائی لا پر ہوا کی کثافت}}{\text{کرہ ہوائی کی کثافت}}$$

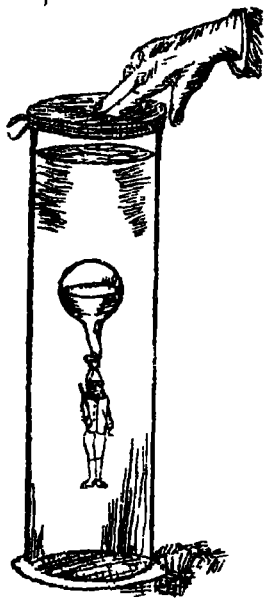
$$= \frac{\text{پانی کی کثافت}}{\text{کرہ ہوائی کی کثافت}}$$ کیونکہ حباب عین تیر سکتا ہے

$= \frac{1000}{1\frac{1}{4}} = 800$ ∴ لا ۲۷۱۶۶ فٹ = ۵ میل سے قدرے زیادہ

پانی کے اندر اس گہرائی سے زیادہ پر حباب ڈوب جائے گا- اور اس سے کم گہرائی پر اوپر اُٹھ جائے گا۔

۱۱۰- کارٹیزی غوّاص- یہ کھلونا شیشے کے ایک جوف پر مشتمل ہوتا ہے جس کے پیندے میں ایک سوراخ ہوتا ہے اس کو متوازن رکھنے کے لئے اس کے پیندے کے ساتھ کچھ وزن لگا ہوتا ہے جو عموماً آدمی کی شکل کا ہوتا ہے جوف کے اندر اسقدر ہوا رکھی جاتی ہے کہ پورا کھلونا پانی کے اندر عین تیر سکتا ہے۔

ذیل کی شکل میں یہ کھلونا ایک اسطوانہ کے اندر جس میں پانی ہے تیر رہا

ہے۔ اسطوانہ کے منہ کو ربڑ کے ایک ٹکڑے سے بند کر دیا گیا ہے۔ اگر ربڑ کو ہاتھ سے دبایا جائے تو بائل کے کلیہ سے اس کے نیچے کی ہوا کا دباؤ بڑھ جاتا ہے۔ یہ مزید دباؤ پانی میں سے منتقل ہوتا ہوا کھلونے کے اندر کی ہوا پر اثر ڈالتا ہے جسکا حجم کلیۂ بائل کی رُو سے کم ہوجاتا ہے۔

اس کا لازمی نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ غواص اب پہلے کے نسبت بہت کم پانی ہٹاتا ہے جس کی وجہ سے پانی کا رأسی دباؤ کم ہوجاتا ہے۔ نیز چونکہ غواص کے وزن میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لئے یہ ڈوب جاتا ہے۔

جب ربڑ پر سے ہاتھ ہٹا لیا جائے تو دباؤ کم ہوجاتا ہے اور غواص بالعموم پھر تیرنے لگتا ہے۔

بعض اوقات برتن بہت گہرا ہوتا ہے اور برتن کے پیندے تک پہنچنے میں یا قبل ازیں غواص کے اندر کی ہوا کا حجم اسقدر کم ہوجاتا ہے کہ غواص کا وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن سے بڑھ جاتا ہے۔ جب ایسا ہو تو خارجی دباؤ کے ہٹا لینے پر بھی غواص اوپر نہیں اُٹھے گا۔

امثلہ نمبری ۲۲

۱- ۴° درجہ سنتی گریڈ تپش کے پانی کے لحاظ سے پارہ کے ۷۰۰ ملی میٹر کے دباؤ پر ہوا کی کثافتِ اضافی ۰۰۱۱۹ء معلوم کی گئی ہے، بتاؤ کہ میعاری دباؤ (یعنی پارہ کے ۷۶۰ ملی میٹر) پر ہوا کی کثافت اضافی کیا ہوگی؟

۲- یہ معلوم ہے کہ جب پارہ کا بارپیما ۲۹ء۴۵ انچ پر ہو تو ۱۰۰ مکعب انچ ہوا کا وزن ۳۱ گرین ہوتا ہے، بتاؤ کہ جب پارہ کے بارپیما کا ارتفاع ۳۰ء۲۳ انچ ہو جائیگا تو ۱۰۰ مکعب انچ ہوا کے وزن میں کیا تبدیلی واقع ہوگی؟

۳- اگر آبی بارپیما ۳۳ فٹ پر ہو تو پانی کی سطح کے نیچے ۱۰ فٹ کی گہرائی پر ایک حباب کا حجم ۳ مکعب انچ ہوتا ہے، بتاؤ کہ کس گہرائی پر اس کا حجم ۲ مکعب انچ ہوگا۔

۴- یہ فرض کرکے کہ آبی بارپیما کا ارتفاع ف ہے بتاؤ کہ ایک گلاس کو اوندھا کرکے پانی کے اندر کس گہرائی تک غرق کیا جائے کہ اسکے اندر کی ہوا کا حجم ابتدائی حجم کا ایک تہائی رہ جائے۔

نیز بتاؤ کہ ایک مخروطی گلاس کو اوندھا کرکے پانی کے اندر کس گہرائی تک ڈبویا جائے کہ پانی اِس کی نصف بلندی تک اِس کے اندر چڑھ جائے۔

۵- اسطوانہ کی شکل کی ایک امتحانی نلی کو الٹا کرکے پانی کے اندر انتصاباً غرق کیا گیا ہے۔ جب نلی کا وسطی نقطہ ۳۲ء۵ فٹ کی

گہرائی پر ہوتا ہے تو نلی کے اندر اس کے نصف طول تک پانی اوپر چڑھ آتا ہے۔ آبی بارپیما کا ارتفاع معلوم کرو۔

۶۔ ایک یکساں نلی کی چوٹی کھلی ہے اور پیندا بند ہے اس کو الٹا کرکے پارہ کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کے ۲۵ سنتی میٹر طول میں گیس بھری رہتی ہے جس کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہے، بتاؤ کہ نلی کو کتنا اوپر اٹھایا جائے کہ اس کے ۵۰ سنتی میٹر طول میں گیس بھر جائے۔

۷۔ چائے دانی کے ڈھکنے میں جو ایک چھوٹا سوراخ رکھا جاتا ہے اور نیز شراب کے ڈبہ میں جو نکاسی سوراخ ہوتا ہے اس کے فوائد بیان کرو۔

۸۔ ایک مجوف بند اسطوانہ کے اندر جس کا طول ۲ فٹ ہے ایک فشارہ ہے۔ جب فشارہ اسطوانہ کے قاعدہ سے ۱۲ انچ کے فاصلہ پر ہو تو اندر کی ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ (یعنی فی مربع انچ ۱۵ پونڈ) کے مساوی ہوتا ہے، قاعدہ کے ایک سوراخ میں سے اسطوانہ کے اندر اس قدر اور ہوا بھری گئی ہے کہ پہلے کی نسبت اسطوانہ کے اندر اب تین گنی ہوا ہو جاتی ہے۔ اگر فشارہ کو ۴ انچ اوپر اٹھنے دیا جائے تو فشارہ کی دونوں جانب ہوا کا دباؤ محسوب کرو۔ فشارہ اپنے ابتدائی محل سے کتنے انچ اوپر اٹھے کہ یہ پھر متوازن ہو جائے۔

۹۔ ایک غبارہ کوئلہ گیس سے آدھا بھرا ہوا ہے۔ جب پارہ کا بارپیما ۳۰ انچ ہو تو غبارہ ہوا میں عین معلق رہ سکتا ہے، اگر بارپیما اتر کر ۲۸ انچ پر آجائے تو بتاؤ کہ کیا واقع ہوگا۔

اگر کل غبارہ میں ۳۰ انچ کے دباؤ پر گیس بھری ہو تو کیا واقع ہوگا؟

۱۰- گیس جمع کرنے کے لئے اسطوانہ کی شکل کا ایک برتن استعمال کیا گیا ہے جو پانی میں اوندھا کیا ہوا ہے۔ اس کا قطر ۲½ فٹ ہے اور اس کا وزن ۶۰ پونڈ ہے۔ بتاؤ کہ اسطوانہ کے وزن کا کونسا حصہ باٹوں سے سہارا جائے کہ اس سے جو گیس میسر آئے اس کا دباؤ پانی کے ایک انچ ارتفاع کے مساوی ہو۔

۱۱- ایک پائنٹ کی شیشی کے اندر ہوا ہے جس کا دباؤ کرۂ ہوئی کے دباؤ کے مساوی ہے، جب شیشی کے ساتھ ۵ اونس وزن اور لگا دیا جاتا ہے تو یہ پانی میں عین تیر سکتی ہے، اس وزن کو ہٹا کر شیشی کی گردن نیچے کی طرف کرکے اسے آہستہ سے نیچے دبایا جاتا ہے، ثابت کرو کہ شیشی پانی میں عین تیرسکیگی جب اندر کے پانی کی سطح بیرونی سطح سے ۱۱ فٹ نیچے ہو۔ اور شیشی ڈوب جائیگی اگر اس کو اور نیچے دبا دیا جائے اور اوپر اُٹھ آئے گی اگر دباؤ ذرا کم کردیا جائے، آبی بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہے اور پانی کے ایک پائنٹ کا وزن ۲۰ اونس ہے۔

۱۲- ایک ہوا بند اسطوانہ کی بلندی ۲ ا ہے، اس اسطوانہ کے آدھے حصے میں ہوا ہے اور آدھے میں پانی، ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہے جو پانی کے ارتفاع ف کے دباؤ کے برابر ہے، اسطوانہ میں مزید بلندی ک تک اور پانی اس طرح بھر دیا گیا ہے کہ ہوا نکلنے نہیں پاتی جس سے قاعدہ پر کا دباؤ دگنا ہو جاتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ک = ا + ف - \sqrt{۴ اف + ف^۲}$$

۱۳۔ ایک انتصابی اسطوانہ کی افقی تراشش ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ایک فٹ ہے، اس کے اندر ایک بے وزن فشارہ پھنس کر آتا ہے۔ ابتداءً فشارہ کے نیچے کی ہوا ۷ فٹ طول کی جگہ گھیرے ہوئے ہے اور اس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ کے مساوی ہے۔ اگر فشارہ پر $\frac{۲}{۳}$ مکعب فٹ لوہا رکھا جائے تو یہ ایک فٹ نیچے چلا جاتا ہے اور اگر علاوہ ازیں فشارہ پر ۶ مکعب فٹ پانی ڈالا جائے تو یہ $\frac{۳۶}{۱۴}$ فٹ اور نیچے چلا جاتا ہے، لوہے کی کثافت اضافی اور آبی باربیما کا ارتفاع دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک مجوف اسطوانہ جس کا ارتفاع ف ہے اوپر سے کھلا ہے اس کو الٹا کرکے پانی کے اندر اتنا ڈبویا گیا ہے کہ اس کا طول ک پانی کے اندر ہے۔ ثابت کرو کہ اندر کی ہوا جو جگہ گھیرے ہوئے ہے اس کا طول لا ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$لا^۲ + لا (فَ + ک - ف) = فَ \times ف$$

جہاں فَ آبی بیما کا ارتفاع ہے

۱۵۔ ایک کھلے کنستر کی بلندی $\frac{۷}{۳۲}$۴ انچ ہے، اس کو الٹا کرکے پارہ کے ایک برتن میں رکھا گیا ہے اور اوپر سے اتنا دبایا گیا ہے کہ اس کا پیندا پارہ کی سطح میں آجاتا ہے، اگر سیمابی باربیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو بتاؤ کہ کنستر کے اندر پارہ کتنا اوپر چڑھ جائے گا؟

۱۶۔ ایک مخروطی گلاس کی بلندی ۴ انچ ہے، اس کو الٹا کرکے پانی کے اندر اس قدر غرق کیا گیا ہے کہ اندر کے پانی کی سطح باہر کے پانی کی سطح سے ۳۴ فٹ نیچے ہے، اگر آبی باربیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ

ہو تو مخروط کے اُس حصہ کی بلندی دریافت کرو جس کے اندر ہوا ہے۔

۱۷ — ایک پتلا مخروط جس کا وزن و ہے ایک مائع کے اندر عین ڈوب جاتا ہے جبکہ اس کا قاعدہ نیچے کی طرف ہو لیکن اگر اس کا راس نیچے کی جانب ہو تو اُسی گہرائی تک ڈبونے کے لئے اس کے اندر م و وزن اور رکھنا پڑتا ہے، ثابت کرو کہ مخروط کا ارتفاع ف م ∛(۱+م) ہے جہاں ف مائع مذکور کے بار پیما کا ارتفاع ہے۔

۱۸ — ایک مستدیر اسطوانہ کا ایک سرا بند ہے، اس کا ارتفاع ۸ فٹ ہے اور اس کی بیرونی اور اندرونی عمودی تراشوں کے رقبوں کی نسبت ۷ : ۴ ہے، بند سرے کی موٹائی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور اسطوانہ کی کثافت اضافی ۲ ہے، اسطوانہ کے کھلے سرے کو نیچے کی طرف کرکے اسے پانی کے اندر ڈبویا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر کھلے سرے کی گہرائی ۱۲ فٹ سے زیادہ ہوگی تو اسطوانہ خود بخود اور نیچے ڈوب جائے گا آبی بار پیما ۳۳ فٹ پر ہے۔

۱۹ — ایک اسطوانہ کا ارتفاع ۵ فٹ ہے اور اس کا محور انتصابی ہے، اسطوانہ کے اندر ہوا ہے جس کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہے، اسطوانہ کے منہ کو ایک پھنس کر آنے والے فشارہ سے بند کیا ہوا ہے جس کی کمیت ۳۰ پونڈ ہے، اگر فشارہ اپنے ہی وزن سے ۲ فٹ نیچے اتر جائے تو بتاؤ کہ فشارہ کو اور ۲ فٹ نیچے اتارنے کے لئے اس پر کتنا مزید دباؤ ڈالنا پڑیگا؟

۲۰ — ایک اسطوانہ کے اندر جس کا محور انتصابی ہے ۵ء۶۲ ۲۱ پونڈ وزن کا ایک فشارہ خوب پھنس کر آتا ہے۔ اسطوانہ کے اندر کچھ ہوا ہے

جس کا طول ۱ فٹ ہوتا ہے جبکہ فشارہ کے اوپر ۳ فٹ کی بلندی تک پانی ڈالا جائے' پانی کے اندر ایک رسی کے ذریعہ ایک کرہ آزادانہ لٹکایا گیا ہے جو پانی کے اندر پورا غرق ہو جاتا ہے' اگر اسطوانہ کا قطر ایک فٹ ہو تو بتاؤ کہ فشارہ اور کتنا نیچے اتر جائیگا؟

۲۱ ـ ایک افقی اسطوانہ کے دونوں سرے بند ہیں اور اس کے عین وسط میں ایک پھنس کر آنے والا فشارہ ہے جس کا وزن و ہے ـ فشارہ کے دونوں جانب ہوا ہے جس کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ ۲۲ کے مساوی ہے' اسطوانہ کو ایک جانب سے اتنا اٹھایا گیا ہے کہ اس کا محور افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے' بتاؤ کہ فشارہ جس مقام پر پھر متوازن ہوگا اس کا فاصلہ ابتدائی مقام سے

و [√(ہ ا + لہ² قم² عہ) − لہ قم عہ]

ہوگا جہاں اسطوانہ کا طول ۲ ا ہے' ہ فشارہ کا رقبہ ہے اور لہ مستقل مقدار ۲۲ہ/و کو تعبیر کرتا ہے ـ

۲۲ ـ ایک انتصابی اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور یہ ہوا سے بھرا ہوا ہے' اس کا ارتفاع ف ہے اور اس کے منہ پر ایک پھنس کر آنے والا بے وزن فشارہ ہے جس پر آہستہ آہستہ پانی ڈالا جاتا ہے ـ ثابت کرو کہ فشارہ کے اوپر اسطوانہ کے اندر پانی کی اتنی مقدار ڈالی جاسکتی ہے جو اس کے ف-فَ طول کو بھر دے پیشتر اس کے کہ پانی اوپر سے بہنا شروع ہو- اس میں فَ آبی بارپیما کے ارتفاع کو تعبیر کرتا ہے اگر فَ > ف تو کیا واقع ہوگا ـ

۱۱۱ ـ ایک گیس کے دباؤ' تپش اور کثافت کا باہمی ارتباط

تجربہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر کسی گیس کی ایک خاص مقدار کا دباؤ مستقل رہے تو اس کی تپش کے ہر ایک درجہ سنٹی گرید کے اضافہ کے جواب میں جو اضافہ اس کے حجم میں واقع ہوگا وہ اس حجم کا ۰۰۳۶۶۵ء (= $\frac{1}{273}$ تقریباً) گنا ہوگا جو صفر درجہ سنٹی گرید پر گیس مذکور کا ہو۔

پس اگر گیس کی ایک خاص کمیت کا حجم °۰ سنٹی گرید پر ح. ہو اور عہ مقدار ۰۰۳۶۶۵ء کو تعبیر کرے تو تپش میں ہر ایک درجہ سنٹی گرید کے اضافہ سے گیس کے حجم میں عہ ح. کا اضافہ ہوگا اور بنابریں ت° سنٹی گرید پر کل اضافہ عہ ح. ت ہوگا۔

لہٰذا اگر ت° سنٹی گرید پر ہوا کے حجم کو ح سے تعبیر کیا جائے تو

ح = ح. + عہ ح. ت = ح. (۱ + عہ ت)

نیز اگر ت° سنٹی گرید اور °۰ سنٹی گرید پر کثافتیں بالترتیب ک اور ک. ہوں تو

ک ح = ک. ح.

اس لئے $\frac{ک.}{ک} = \frac{ح}{ح.} = ۱ + عہ ت$

∴ ک. = ک (۱ + عہ ت)

مندرجہ بالا کلیہ کو بعض اوقات گے لزک کے کلیہ سے اور بعض اوقات چارلس کے کلیہ سے موسوم کرتے ہیں۔

۱۱۲ — دفعہ ماقبل کا کلیہ تمام گیسوں پر صادق آتا ہے جو گیسیں قریب قریب کامل ہیں ان کی صورت میں عہ کی قیمت اسی مقدار

یعنی $\frac{۱}{۲۷۳}$ کے نہایت قریب ہے۔
تپش ناپنے میں اگر سنٹی گرید تپش پیما کی بجائے فارن ہیٹ استعمال کیا جائے تو ۂ کی قیمت بتقریبًا $\frac{۵}{۹} \times \frac{۱}{۲۷۳}$ ہوگی۔
[کیونکہ فارن ہیٹ پیمانہ کے ۱۸۰ درجہ سنٹی گرید پیمانہ کے ۱۰۰ درجوں کے مساوی ہوتے ہیں یعنی ۱° فارن ہیٹ = $\frac{۵}{۹}$° سنٹی گرید]

مشق ۱۔ اگر ہوا کی ایک خاص مقدار کا حجم ۱۰° سنٹی گرید تپش پر ۳۰۰ مکعب سنٹی میٹر ہو تو اس کا حجم ۲۰° سنٹی گرید پر (جب دباؤ وہی رہے) معلوم کرو۔
اگر ۰° سنٹی گرید پر حجم ح ہو تو

$$۳۰۰ = ح + ۱۰ \times \frac{۱}{۲۷۳} \times ح = \frac{۲۸۳}{۲۷۳} \times ح$$

$$\therefore ح = \frac{۲۷۳}{۲۸۳} \times ۳۰۰$$

لہٰذا ۲۰° سنٹی گرید پر حجم مطلوبہ = $ح + ۲۰ \times \frac{۱}{۲۷۳} \times ح$

$$= \frac{۲۹۳}{۲۷۳} ح = \frac{۲۹۳}{۲۸۳} \times ۳۰۰$$

$$= ۳۱۰ \frac{۱۷۰}{۲۸۳}$$ مکعب سنٹی میٹر

مشق ۲۔ گیس کی ایک خاص مقدار کا حجم ۱۵° سنٹی گرید پر ۴۰۰ مکعب سنٹی میٹر ہے، اگر اس کے دباؤ میں تبدیلی واقع نہ ہو تو بتاؤ کہ کس تپش پر اس کا حجم ۵۰۰ مکعب سنٹی میٹر ہو جائیگا۔
فرض کرو کہ مطلوبہ تپش ت ہے تب

$$\frac{۵۰۰}{۴۰۰} = \frac{\text{حجم ت° سنٹی گرید پر}}{\text{حجم ۱۵° سنٹی گرید پر}} = \frac{\frac{ت}{۲۷۳} + ۱}{\frac{۱۵}{۲۷۳} + ۱}$$

= (۲۷۳ + ت) / ۲۸۸   ∴ ت = ۸۷° سنتی گرید

۱۱۳ — فرض کرو کہ کچھ گیس ۰° سنتی گرید پر ایک اسطوانہ کے اندر بند ہے اور اتنے وزن کے ایک فشارہ کو تھامے ہوئے ہے کہ گیس کا دباؤ د ہے۔ اگر گیس کی کثافت ک. ہو تو

د = م ک. .... (۱)

اب اسطوانہ کو اتنا گرم کرو کہ اس کی تپش ت° سنتی گرید ہوجائے فرض کرو کہ گیس کی کثافت اب ک ہے۔ تب کلیۂ چارلس سے ظاہر ہے کہ

ک. = ک (۱ + ع ت) .... (۲)

(۱) اور (۲) کی رو سے

د = م ک (۱ + ع ت)

اس سے گیس کی تپش، دباؤ اور کثافت کا باہمی ربط معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۴ — تپش مطلق — اگر کسی گیس کو بالتدریج ٹھنڈا کرتے جائیں حتیٰ کہ اس کی تپش صفر درجہ سنتی گرید سے بھی بہت نیچے ہوجائے اور گیس مائع نہ بنے بلکہ چارلس اور بائل کے کلیوں کے تحت میں رہے تو کسی تپش ت۱ پر گیس کا دباؤ صفر ہوجائیگا جہاں

۱ + ع ت۱ = ۰

یعنی ت۱ = − ۱/ع = − ۲۷۳

اس − ۲۷۳ درجہ کی تپش کو ہوائی تپش پیما کا صفر مطلق کہتے ہیں اور کسی گیس کی تپش جو اس صفر سے ناپی جائے

تپش مطلق کہلاتی ہے، تپش مطلق کو بالعموم ت سے تعبیر کرتے ہیں پس ت = $\frac{1}{\text{عہ}}$ + ت

لہٰذا د = م ک (۱ + عہ ت) = م ک عہ ($\frac{1}{\text{عہ}}$ + ت)

= م ک عہ ت

اب اگر گیس کی ایک خاص مقدار کا حجم ح ہو تو

$\frac{\text{د ح}}{\text{ت}}$ = م عہ [ح × ک] = م عہ × گیس کی کمیت

= ایک مقدار مستقل

اسلئے اگر کسی گیس کی کوئی خاص کمیت دی ہوئی ہو تو اس کے دباؤ اور حجم کا حاصل ضرب اس کی تپش مطلق کے متناسب ہوتا ہے۔

مشق ۱ — ایک کرہ کے اندر ہوا ہے کرہ کے نصف قطر کو دگنا کر دیا گیا ہے اور نیز اس کی تپش کو ۰° سنتی گریڈ سے ۹۱° سنتی گریڈ کر دیا گیا ہے ثابت کرو کہ ایسا کرنے سے آخری دباؤ ابتدائی دباؤ کا $\frac{1}{6}$ رہ گیا ہے، مان لو کہ پھیلاؤ کی قدر فی درجہ سنتی گریڈ $\frac{1}{273}$ ہے۔

فرض کرو کہ ابتدائی دباؤ د اور آخری دباؤ دَ ہے، ابتدائی کثافت ک اور آخری کثافت کَ ہے۔

چونکہ کرہ کے نصف قطر کو دگنا کر دیا گیا ہے اس لئے آخری حجم ابتدائی حجم کا ۸ گنا ہے

∴ کَ = $\frac{1}{8}$ ک

∴ $\frac{\text{دَ}}{\text{د}}$ = $\frac{\text{م کَ (۱ + عہ × ۹۱)}}{\text{م ک}}$ = $\frac{1}{8}$ [۱ + $\frac{91}{273}$]

$$\frac{۱۱}{۹} = \frac{۳۶۳}{۲۷۳} \times \frac{۱}{۲} =$$

امثلہ نمبری ۲۳

[ذیل کی امثلہ میں ع کو $\frac{۱}{۲۷۳}$ کے برابر فرض کرو]

۱۔ صفر درجہ سنتی گرید کی تپش اور پارہ کے ۷۶ سنتی میٹر کے دباؤ پر حجم محسوب کرو

(۱) اس ہوا کا جس کا حجم ۸۰ سنتی میٹر کے دباؤ اور ۳۰ سنتی گرید کی تپش پر ۱۰۰ مکعب سنتی میٹر ہو

(۲) اس ہوا کا جس کا حجم ۳ ہوائی کروں کے دباؤ اور ۱۰۰ فارن ہیٹ تپش پر ۳ مکعب فٹ ہو۔

۲۔ گیس کی ایک خاص مقدار پارہ کے ۵۷ انچ دباؤ اور ۹۹ سنتی گرید پر ۹ مکعب انچ جگہ گھیرتی ہے بتاؤ کہ پارے کے ۱۵ انچ دباؤ اور ۱۶ سنتی گرید تپش پر کتنی جگہ گھیرے گی؟

۳۔ پارہ کے ۲۲ انچ دباؤ اور ۳۹ سنتی گرید تپش پر ہوا کی ایک خاص کمیت ۱۵ مکعب انچ جگہ گھیرتی ہے، بتاؤ کہ پارہ کے ۴۵ انچ دباؤ اور ۸۰ سنتی گرید تپش پر اس کا حجم کیا ہوگا؟

۴۔ سطح سمندر پر تپش ۷ سنتی گرید ہے اور بار پیما ۷۶۵ ملی میٹر پر ہے۔ نیز ایک پہاڑ کی چوٹی پر تپش ۳ سنتی گرید ہے اور بار پیما ۴۰۰ ملی میٹر پر ہے۔ دونوں جگہوں پر ہوا کے ایک مکعب میٹر کے اوزان کا مقابلہ کرو۔

۵ ۔ ایک اسطوانہ میں دو گیسیں ہیں جن کے اختلاط کو ایک حرکت کرنے والا فتیلہ روکے ہوئے ہے۔ دونوں گیسیں ۰ سنتی گرید پر ہیں اور ان میں

سے ایک کا حجم دوسری کے حجم کا دُگنا ہے ۔ اگر زیادہ حجم والی گیس کی تپش سکون ت° بڑھا دیا جائے تو ثابت کرو کہ فشارہ (۲ ل عہ ت)/(۶ + ۹ عہ ت) جگہ میں سے حرکت کرے گا جہاں ل اسطوانہ کا طول ہے اور عہ پھیلاؤ کی قدرتی درجہ سنتی گریڈ ہے ۔

۶ ــ ایک کرہ کے اندر ہوا ہے ، کرہ کے نصف قطر کو دگنا کرکے اس کی تپش کو ۰° سنتی گریڈ سے ۵۵۴° سنتی گریڈ کر دیا گیا ہے ، اگر ہوا کے پھیلاؤ کی قدرتی درجہ سنتی گریڈ ۱/۲۷۳ ہو تو ثابت کرو کہ اندر کی ہوا کا دباؤ پہلے کی نسبت ۱/۴ رہ جائے گا ۔

۷ ــ ۰° سنتی گریڈ تپش پر ہوا کے ایک سنتی میٹر مکعب کا وزن ۰۰۱ء گرام ہے جبکہ باد پیما کا ارتفاع ۷۶ سنتی میٹر ہے پارہ کی کثافت ۱۳٫۵۹۶ ہے جاذبہ ارض کے اسراع کی عددی قیمت ۹۸۱ ہے اور مستقل دباؤ کے ماتحت نقطۂ انجماد سے لیکر نقطۂ جوش تک ہوا کے پھیلاؤ کی شرح اسے ۳۶۶ ۰۰ء تک ہوتی ہے ۔ ایک گرام ہوا کے لئے دح/ت کی قیمت محسوب کرو ۔

۸ ــ ایک فشارہ ایک اسطوانہ میں پھنس کر آتا ہے اور اس کے اندر آزادانہ حرکت کرتا ہے ، ابتداءً اس کو اسطوانہ کے عین وسط میں رکھا گیا ہے اور اسطوانے کے سرے بند کر دئے گئے ہیں ۔ جب اسطوانہ کو انتصابی سمت میں رکھا جاتا ہے تو فشارہ کا فاصلہ بالائی سرے سے اسطوانہ کے کل طول کا ۲/۳ گنا ہوتا ہے لیکن اگر دونوں حصوں کی تپشوں کو بڑھا کر بالترتیب ت۱ اور ت۲ کر دیا جائے جہاں ت۱ اور ت۲ مطلق تپشیں ہیں تو فشارہ پھر اسطوانہ کے وسط میں آجاتا ہے ، ثابت کرو کہ اسطوانہ کی ابتدائی مطلق

تپش $ت_1$ سے $ت_2$ تھی۔

۱۱۵۔ گیسوں کے آمیزہ کا دباؤ۔ یہ تجربہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر دو ظرفوں میں دو قسم کی گیسیں موجود ہوں اور دونوں ایک ہی تپش اور دباؤ پر ہوں تو اُن کو ملانے سے اِنکے آمیزہ کا دباؤ وہی رہیگا جو پہلے تھا بشرطیکہ دونوں گیسوں میں کسی قسم کا اتحاد کیمیائی واقع نہ ہو۔

۱۱۶۔ دو گیسیں ایک ہی تپش پر ہیں اور اُن میں سے ہر ایک کا حجم $ح$ ہے ان کے دباؤ بالترتیب $د_1$ اور $د_2$ ہیں۔ اگر ان کو ملا دیا جائے اور آمیزہ کا حجم بھی $ح$ ہو تو آمیزہ کا دباؤ $د_1 + د_2$ ہوگا بشرطیکہ تپش میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو۔

دوسری گیس کے حجم کو ایسے بدلو کہ اس کا دباؤ $د_1$ ہو جائے، تب کلیہ بائل کی رو سے اس کا حجم $\frac{ح \times د_2}{د_1}$ ہوگا۔

اب ہمارے پاس دو مختلف گیسوں کے دو حجم $ح$ اور $\frac{ح د_2}{د_1}$ ہیں اور ہر ایک کا دباؤ $د_1$ ہے، ان کو ملا دو۔

دفعہ گزشتہ کے تجربہ کی بنا پر آمیزہ کا حجم $\left(ح + ح \frac{د_2}{د_1}\right)$ اور دباؤ $د_1$ ہوگا۔

اب فرض کرو کہ آمیزہ کا حجم $ح$ بنا دیا گیا ہے اور اس کے متناظر دباؤ کی قیمت $د$ ہے۔ تب بائل کے کلیہ کی رو سے

$$ح \times د = \left(ح + ح \times \frac{د_2}{د_1}\right) \times د_1$$

$$\therefore د = د_1 + د_2$$

۱۱۷ ـ دو گیسوں کو جن کے حجم $ح_1$ اور $ح_2$ اور دباؤ $د_1$ اور $د_2$ ہیں باہم ملا کر ایک ایسے ظرف میں ڈالا گیا ہے جس کا حجم ح ہے۔ اگر تپش نہ بدلے تو آمیزہ کا دباؤ محسوب کرو۔

دوسری گیس کو دباؤ $د_2$ سے $د_1$ پر لے آؤ، تب بائل کے کلیہ کے مطابق اس کا حجم $ح_2$ سے $\frac{ح_2 د_2}{د_1}$ ہو جائے گا۔

اب ہمارے پاس حجم $ح_1$ اور $\frac{ح_2 د_2}{د_1}$ کی دو گیسیں ہیں اور ہر ایک کا دباؤ $د_1$ ہے، حسب سابق اُن کو ملانے سے حجم $ح_1 + \frac{ح_2 د_2}{د_1}$ کا ایک آمیزہ حاصل ہوگا جس کا دباؤ $د_1$ ہوگا۔

اب فرض کرو کہ آمیزہ کا حجم بدل کر ح اور بنابریں اس کا دباؤ د کر دیا گیا ہے۔ تب بائل کے کلیہ کی رو سے

$$د \times ح = د_1 \times \left(ح_1 + \frac{ح_2 د_2}{د_1}\right) = د_1 ح_1 + د_2 ح_2$$

$$\text{یعنی مطلوبہ دباؤ} = \frac{د_1 ح_1 + د_2 ح_2}{ح}$$

۱۱۸ ـ اگر دفعہ ۱۱۶ کی مانند ہمارے پاس متعدد گیسیں ہوں جن میں سے ہر ایک کا حجم ح ہو لیکن دباؤ بالترتیب $د_1$، $د_2$، $د_3$ .... ہوں تو جب اُن کو ملانے سے بالآخر آمیزہ کا حجم ح بنا دیا جائے تو آمیزہ کا دباؤ $د_1 + د_2 + د_3 + ...$ ہوگا۔

یہ کلیہ ڈالٹن کے کلیہ سے موسوم ہے۔ اس کو بالفاظ دیگر یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے: اگر ایک خاص حجم کے اندر بہت سی گیسوں کو بھر دیا جائے تو ہر ایک گیس کا دباؤ اتنا ہی

ہوگا جتنا کہ باقی گیسوں کی عدم موجودگی میں اس کا ہوتا، یعنی آمیزہ کا مجموعی دباؤ سب گیسوں کے انفرادی دباؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

مشق ۔ دو گیسوں کی کمیتیں بالترتیب م اور مَ ہیں اور ہر ایک کے دباؤ اور کثافت کی نسبت بالترتیب ک اور کَ، اگر ان کو ملانے سے تپش میں کوئی فرق نہ آئے تو ثابت کرو کہ آمیزہ میں دباؤ کی نسبت کثافت کے ساتھ

$$\frac{\text{م ک + مَ کَ}}{\text{م + مَ}}$$

.... ہوگی۔

۱۱۹۔ باریما کے ذریعہ بلندیوں کا معلوم کرنا

اگر کرۂ ہوائی حالت سکون میں ہو اور اس کی تپش مستقل ہو اور اگر اس میں ایسے نقطے لیئے جائیں جن کی بلندیاں سطح زمین کے اوپر سلسلہ حسابیہ میں ہوں (جس کا مشترک فرق بہت چھوٹا ہو) تو ان نقطوں پر کے دباؤ سلسلۂ ہندسیہ میں ہونگے۔

فرض کرو کہ ایک انتصابی خط پر نقاط $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$.... کا ایک سلسلہ ایسا ہے کہ

$$\text{د}ن_1 = ن_1ن_2 = ن_2ن_3 = \cdots = ن_{ر-1}ن_ر$$

= ہ، جہاں ہ بہت چھوٹا ہے

ہوا کے ایک چھوٹے اسطوانہ پر غور کرو جس کی افقی تراش بہت چھوٹی ہے اور جس کا محور خط مستقیم د $ن_1$ $ن_2$ ...... ہے

[**نوٹ**۔ جو طالب علم احصاء تکملات سے واقف ہے اُسے چاہیئے اس موقع پر ضمیمہ کتاب ہذا کا مطالعہ کرے]

چونکہ یہ بہت چھوٹا ہے اس لئے ہم کسی دو مسلسل نقاط کی درمیانی تہ میں ہوا کی کثافت کو یکساں تصور کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ نیچے سے شروع ہوکر اوپر کی جانب مسلسل تہوں کی کثافتیں بالترتیب $ک_۱$، $ک_۲$، $ک_۳$ ..... ہیں اور بنابریں ان کے دباؤ بالتسلسل $م ک_۱$، $م ک_۲$، $م ک_۳$ ..... ہیں۔

پس ان دباؤں کو ہم بالترتیب نقاط $ن$، $ن_۱$، $ن_۲$ .... پر کے دباؤ تصور کر سکتے ہیں۔

$ن$ اور $ن_۱$ پر کے رخوں کے دباؤں میں جو فرق ہے وہ جزو $ن ن_۱$ کے وزن کو سہارے ہوئے ہے۔

$$\text{اس لئے}\quad م ک_۱ - م ک_۲ = ج ک_۱ ہ$$

اسی طرح سے اسطوانوں $ن_۱ ن_۲$، $ن_۲ ن_۳$، $ن_۳ ن_۴$ .... کے لئے

$$\text{لہذا}\quad م ک_۲ - م ک_۳ = ج ک_۲ ہ$$

$$م ک_۳ - م ک_۴ = ج ک_۳ ہ$$

....

$$م ک_{ر-۱} - م ک_ر = ج ک_{ر-۱} ہ$$

$$\text{لہذا}\quad ک_۲ = ک_۱ \left[۱ - \frac{ج ہ}{م} \right]$$

$$ک_۳ = ک_۲ \left[۱ - \frac{ج ہ}{م} \right] = ک_۱ \left[۱ - \frac{ج ہ}{م} \right]^۲$$

$$ک_۴ = ک_۳ \left[۱ - \frac{ج ہ}{م} \right] = ک_۱ \left[۱ - \frac{ج ہ}{م} \right]^۳$$

. . . .

$$\text{ک}_{\text{ر}} = \text{ک}_{\text{ر}-1}\left[1 - \frac{\text{ج به}}{\text{م}}\right] = \text{ک}_1\left[1 - \frac{\text{ج به}}{\text{م}}\right]^{\text{ر}-1}$$

پس کثافتیں ک_1، ک_2، ک_3 ..... اور اس لئے اُن کے متناظر دباؤ سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

اگر ن کے عین اوپر کثافت ک ہو تو حسب بالا

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ر}}\left[1 - \frac{\text{ج به}}{\text{م}}\right] = \text{ک}_1\left[1 - \frac{\text{ج به}}{\text{م}}\right]^{\text{ر}}$$

اگر ہم ربه کی بجائے ف رکھیں جس کے یہ معنی ہونگے کہ زمین سے بلندی ف پر کثافت ک ہے تو

$$\text{ک} = \text{ک}_1\left[1 - \frac{\text{ج ف}}{\text{ر م}}\right]^{\text{ر}}$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{ج ف}}{\text{ر م}} = \frac{1}{\text{ی}}$

$$\text{تب ک} = \text{ک}_1\left[1 - \frac{1}{\text{ی}}\right]^{\frac{\text{ج ف ی}}{\text{م}}} = \text{ک}_1\left\{\left[1 - \frac{1}{\text{ی}}\right]^{-\text{ی}}\right\}^{-\frac{\text{ج ف}}{\text{م}}}$$

اب ر کو لاانتہا بڑھاؤ لیکن ف کو بدستور مستقل رکھو جس کا مفہوم یہ ہوگا کہ و ن جن تہوں میں منقسم ہے ان کی تعداد کو لاانتہا بڑھا دیا گیا ہے۔ تب چونکہ

$$\text{نہا}_{\text{ی} \to \infty}\left[1 - \frac{1}{\text{ی}}\right]^{-\text{ی}} = \text{و}$$

جس میں و سے مراد لوکارتموں کے نیپری نظام کا اساس ہے

$$\therefore \text{ک} = \text{ک}_{\text{۱}}\,\text{و}^{\frac{-\text{ج ف}}{\text{م}}}$$

اس ضابطہ سے بلندی ف پر کی کثافت سطح زمین پر کی کثافت کی رقوم میں معلوم ہوتی ہے۔ لیکن یہ کثافت اس مفروضہ کی بناء پر محسوب کی گئی ہے کہ ج کی قیمت ہر جگہ مستقل رہتی ہے اور یہ امر صریحاً زمین کی سطح کے اوپر محدود فاصلوں تک ہی درست متصور ہو سکتا ہے۔

علاوہ ازیں اس میں تپش کو بھی غیر متغیر فرض کیا گیا ہے جو امر واقع کے خلاف ہے کیونکہ ارتفاع کے قابل لحاظ تفاوت سے تپش میں بھی اختلاف واقع ہوتا ہے۔

۱۲۰ — بار پیما کے پڑھنے سے دو مقامات کی بلندیوں کا فرق دریافت کرو۔

دفعہ ما قبل کے ضابطہ سے

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{۱}}\,\text{و}^{\frac{-\text{ج ف}}{\text{م}}}$$

فرض کرو کہ دو مقامات مذکورہ پر بار پیما ع اور $\text{ع}_{\text{۱}}$ پر ہے، تب

$$\text{ع} : \text{ع}_{\text{۱}} = \text{ک} : \text{ک}_{\text{۱}} \qquad (\text{حسب کلیہ بائل})$$

$$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{۱}}} = \text{و}^{\frac{-\text{ج ف}}{\text{م}}}$$

$$\therefore \text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{۱}}} = \frac{-\text{ج ف}}{\text{م}}$$

$$\therefore \text{ش} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ع}_{۱}}{\text{ع}} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}\,\text{لوک}_{۱۰}\frac{\text{ع}_{۱}}{\text{ع}} \times \text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰$$

$$= \frac{\text{م}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰}{\text{ج}}\left[\text{لوک}_{۱۰}\,\text{ع}_{۱} - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ع}\right]$$

پس دو مقامات کا عمودی ارتفاع فٹوں میں حاصل کرنے کے لئے مقامات مذکورہ پر بار پیما کی جو بلندیاں ہوں ان کے لوکارثموں کے فرق کو مقدار مستقل $\frac{\text{م}}{\text{ج}}$ لوک$_{\text{و}}$ ۱۰ سے ضرب دینا پڑتا ہے۔

دفعہ ۱۰۸ کی مشق میں م کی جو قیمت محسوب کی گئی ہے اس کی رو سے اور ج = ۳۲٫۲ اور $\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰ = \frac{۱}{\text{لوک}_{۱۰}\,\text{و}} = \frac{۱}{۰٫۴۳۴۲۹} = ۲٫۳۰۲۶$ لینے سے مذکورہ بالا مقدار مستقل کی قیمت تقریباً ۶۰۲۰۰ ہوتی ہے جبکہ طول کی اکائی فٹ مانی جائے۔

اگر س، گ، ث اکائیاں استعمال کی جائیں تو دفعہ ۱۰۸ میں م کی قیمت ۷۹۸۴۱۰۰۰ معلوم کی جا چکی ہے۔
نیز چونکہ اس نظام کے مطابق ج = ۹۸۱، اس لئے یہ

$$\text{مقدار مستقل} = \frac{۲٫۳۰۲۶ \times ۷۹۸۴۱۰۰۰}{۹۸۱}$$

$$= ۱۸۳۰۳۰۰ \text{ تقریباً}$$

مشق ۱ — ثابت کرو کہ بار پیما کا ۷۶ سنتی میٹر سے ۷۵ سنتی میٹر پر آجانا تقریباً ۱۰۵ میٹر کے صعود کو تعبیر کرتا ہے جہاں

لوک ۷۵ = ۱۸۷۵۰۶ ، ۱   لوک ۷۶ = ۱۸۸۰۸۱ ، ۱   لوک ۵ = ۶۹۸۹۷۰ ، ۰

مشق ۲ — اگر بار پیما کا پارہ ۳۰ انچ سے ۲۵ انچ پر اتر آئے اور اس سے ۴۵۰۰ فٹ کا صعود تعبیر ہو تو بتاؤ کہ جب بار پیما کا پارہ ۲۰ انچ پر ہوگا تو اس سے ۱۰۰۰۷ فٹ کا ارتفاع تعبیر ہوگا۔

۱۲۱ — اب ہم ذیل میں ناقص بار پیماؤں کے متعلق چند مثالیں درج کرتے ہیں۔

مشق ۱ — کرۂ ہوائی کے دباؤ پر کی ۱۰ مکعب فٹ ہوا کو ایک ایسے بار پیما کے خلا میں داخل کر دیا گیا ہے جو پہلے ۷۶ سنتی میٹر پر تھا۔ اس عمل سے پارہ نیچے اتر جاتا ہے اور ہوا ۱۵ مکعب سنتی میٹر جگہ گھیرتی ہے، بار پیما کا آخری ارتفاع دریافت کرو۔

کرۂ ہوائی کے دباؤ کو H سے تعبیر کرو۔ تب بائل کے کلیہ کے مطابق

$$\frac{\text{ہوا کا آخری دباؤ}}{H} = \frac{\text{ابتدائی حجم}}{\text{آخری حجم}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \text{ہوا کا آخری دباؤ} = \frac{2}{3}H$$

پارہ کے ستون کے اوپر اب ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کا $\frac{2}{3}$ ہے یعنی اب پارہ کے ستون کا طول ابتدائی طول کا $\frac{1}{3}$ ہے اور اس لئے اب یہ صرف $25\frac{1}{3}$ سنتی میٹر ہے۔

مشق ۲ — جب صحیح بار پیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو ایک ناقص بار پیما کا ارتفاع ۲۸ انچ ہوتا ہے جبکہ موخر الذکر بار پیما کی نلی کے $3\frac{1}{3}$ انچ طول میں ہوا ہو۔ اگر صحیح بار پیما کا پارہ ۲۹ انچ پر آجائے تو ثابت کرو کہ ناقص بار پیما $27\frac{1}{3}$ انچ پر ہوگا۔

جب کرۂ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ۳۰ انچ کے برابر ہو تو فرض کرو کہ ہوا کے ستون کا طول لا انچ ہے، اسلئے جب اس کا طول $۳\frac{۱}{۳}$ انچ ہوگا تو اس کا دباؤ فی مربع انچ

$$= \frac{لا}{۳\frac{۱}{۳}} \times \text{کرۂ ہوائی کا دباؤ} = \frac{لا}{۳\frac{۱}{۳}} \times و_{۱} \times ۳۰$$

جہاں $و_{۱}$ ایک مکعب انچ پارہ کا وزن ہے۔

لہذا ناقص بارپیما کے توازن کے لئے ضرور ہے کہ

$$\frac{لا}{۳\frac{۱}{۳}} \times و_{۱} \times ۳۰ + و_{۱} \times ۲۸ = \text{کرہ ہوائی کا دباؤ}$$

$$= و_{۱} \times ۳۰$$

$$\therefore \quad لا = \frac{۲}{۹}$$

جب صحیح بارپیما ۲۹ انچ پر ہو تو فرض کرو کہ ناقص بارپیما کا ارتفاع ما انچ ہے۔ اسلئے ہوا کا دباؤ فی مربع انچ

$$= \frac{۳۰ \times لا}{۳۱\frac{۱}{۳} - ما} \times و_{۱}$$

$$\therefore \quad ۲۹ = ما + ۳۰ \times \frac{لا}{۳۱\frac{۱}{۳} - ما} = ما + \frac{۲۰}{۹۴ - ۳ما}$$

$$\therefore \quad ما = ۲۷\frac{۱}{۳}$$

اس مساوات کا دوسرا حل یعنی ۳۳ صریحاً ناقابل تسلیم ہے۔

مشق ۳ — جب صحیح بارپیما کے ارتفاع عہ اور بہ ہوں تو ایک ناقص بارپیما کے ارتفاع جس کے اندر کچھ ہوا ہے بالترتیب ا اور ب ہوتے ہیں۔ اگر ناقص بارپیما ج پر ہو تو صحیح بارپیما کا ارتفاع محسوب کرو۔

فرض کرو کہ ہوا کی مذکورہ بالا مقدار بارپیما کے طول لا کو گھیرتی ہے

جبکہ کرۂ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ف انچوں کے برابر ہو -

پہلی صورت میں ہوا کا دباؤ عہ - ا انچوں کے دباؤ کے مساوی ہے

اور اس لئے اس کا طول اس وقت $= \frac{\text{ف}}{\text{عہ} - \text{ا}} \times \text{لا}$ [بموجب کلیہ بائل]

پس بارپیما کی نلی کا کل طول $= \text{ا} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}}$

اور دوسری صورت میں ہوا کا دباؤ = بہ - ب اور بہ جس قدر طول کو گھیرے ہوئے ہے وہ $= \text{ا} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}} - \text{ب}$

اس لئے بائل کے کلیہ سے $(\text{بہ} - \text{ب})\left(\text{ا} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}} - \text{ب}\right) = \text{ف لا}$

$$\therefore \text{ف لا} = \frac{(\text{عہ} - \text{ا})(\text{بہ} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})}{(\text{عہ} - \text{ا}) - (\text{بہ} - \text{ب})}$$

تیسری صورت میں اگر اصلی طول جہ ہو تو ہوا کا طول

$$= \text{ا} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}} - \text{ج}$$

اور اس کا دباؤ = جہ - ج

$$\therefore \left(\text{ا} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}} - \text{ج}\right)(\text{جہ} - \text{ج}) = \text{ف لا}$$

$$\therefore \text{جہ} = \text{ج} + \frac{\text{ف لا}}{\text{ا} - \text{ج} + \frac{\text{ف لا}}{\text{عہ} - \text{ا}}}$$

جو اختصار کے بعد $= \text{ج} + \frac{(\text{عہ} - \text{ا})(\text{بہ} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})}{(\text{ا} - \text{ج})(\text{عہ} - \text{ا}) - (\text{ب} - \text{ج})(\text{بہ} - \text{ب})}$

امثلہ نمبری ۲۴

۱ــ اس کی کیا وجہ ہے کہ بارہ پیما کے اوپر کے حصہ میں تھوڑی سی ہوا

داخل کرنے سے اس کا پارہ بہت زیادہ نیچے اُتر جاتا ہے لیکن لوہے کے ایک ٹکڑے سے جو پارہ کی سطح پر تیرتا ہے یہ بہت کم نیچے دبتا ہے۔

۲۔ ایک بار پیما ۳۰ انچ پر ہے، نلی کی عمودی تراش کا رقبہ ½ مربع انچ ہے اور پارہ کے اوپر مکمل طور پر خلا ہے، بار پیما کے اندر باہر سے ایک مکعب انچ ہوا داخل کر دی گئی ہے جس سے پارہ ۴ انچ نیچے اتر جاتا ہے۔ بتاؤ کہ خلا کا حجم پہلے کتنا تھا۔

۳۔ ہوا کا ایک بلبلہ جس کا حجم پارہ کے ۳۰ انچ دباؤ پر ایک مکعب انچ ہے بار پیما کی نلی کے اندر چلا جاتا ہے نلی کی عمودی تراش کا رقبہ ایک مربع انچ ہے اور اس کے خلا کا طول ایک انچ ہے، بتاؤ کہ پارہ کتنا نیچے اتر جائے گا۔

۴۔ بار پیما کی ایک یکساں نلی کی چوٹی ظرف کے پارہ کی سطح سے ۳۳ انچ کی بلندی پر ہے لیکن نلی کے اندر کچھ ہوا داخل ہو جانے کی وجہ سے بار پیما ۲ء۲۸ انچ پر رہتا ہے جبکہ کرۂ ہوائی کا دباؤ پارہ کے ۲۹ انچ کے مساوی ہوتا ہے، بتاؤ کہ اگر اس بار پیما کا پارہ ۸۴ء۲۹ انچ پر ہو تو اس سے کس قدر اصلی ارتفاع تعبیر ہوگا۔

۵۔ بار پیما کی ایک یکساں نلی کی چوٹی ظرف کے پارہ کی سطح سے ۳۶ انچ کی بلندی پر ہے۔ نلی کے اندر کچھ ہوا ہونے کی وجہ سے بار پیما ۲۷ انچ پر ہوتا ہے جبکہ درحقیقت اس کو ۵ء۲۸ انچ پر ہونا چاہیئے، بتاؤ کہ اگر بار پیما ۳۰ انچ پر ہو تو اس سے درحقیقت کتنا ارتفاع تعبیر ہوگا؟

۶۔ جب صحیح بار پیما ۳۰ انچ پر ہو تو ایک ناقص بار پیما جس کی نلی کے اندر کچھ ہوا ہے ۲۸ انچ پر ہوتا ہے، اگر ان دونوں آلوں کو ہوا پمپ کے

قابلہ کے اندر رکھ کر قابلہ کی کچھ ہوا خارج کی جائے تو ان کا پارہ بالترتیب ۱۵ انچ اور ۶ء۱۴ انچ پر ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ناقص بار پیما کی نلی کا وہ طول جو ظرف کے پارہ کی سطح سے ناپا جائے ۳۵ء۳۱ انچ ہے۔

۷۔ میری اوٹ کی نلی کی درجہ بندی انچوں میں کی گئی ہے۔ چھوٹی ساق میں پارہ ۴ درجہ پر ہے اور اس کے اوپر کے اس حصہ کا طول جس میں ہوا ہے ۵ انچ ہے۔ دوسری ساق میں پارہ ۳۸ درجہ پر ہے اور بار پیما اس وقت ۵ء۲۹ انچ کا دباؤ ظاہر کرتا ہے۔ بتاؤ کہ مذکورہ بالا ۵ انچ ہوا پر کس قدر دباؤ ہے اور نیز بتاؤ کہ صرف بار پیما کے دباؤ کے ماتحت یہ ہوا نلی کے کتنے طول کو گھیرے گی۔

۸۔ ایک یکساں سوراخ والی لاما نلی کی ساقیں انتصابی ہیں، ان میں سے ایک ساق کا سرا بند ہے اور دونوں ساقوں کے اندر مساوی بلندی تک پارہ ہے۔ اگر کھلی ساق میں اتنا پارہ اور ڈال دیا جائے جو نلی کے ۸ انچ طول کو بھرنے کے لئے کافی ہو تو بند ساق کے اندر پارہ ایک انچ اوپر چڑھ جاتا ہے اور اگر مزید برآں اتنا پارہ اور ڈالا جائے جو نلی کے ۱۱ انچ کو بھر سکے تو دوسری ساق میں ارتفاع ایک انچ اور بڑھ جاتا ہے، پارہ کے بار پیما کا ارتفاع محسوب کرو۔

۹۔ ایک بار پیما کی نلی کے اندر پارہ کی سطح کے اوپر کچھ ہوا ہے جس کی وجہ سے یہ بار پیما ۷۰۰ ملی میٹر پر ہوتا ہے جبکہ معیاری بار پیما ۷۶۲ ملی میٹر پر ہو۔ اندر کی ہوا کا دباؤ فی مربع سنتی میٹر گراموں کے وزن میں دریافت کرو جبکہ پارہ کی کثافت اضافی ۵۹۶ء۱۳ ہو۔

۱۰۔ ایک بار پیما کی خمدار نلی کا سوراخ یکساں ہے اور اس کا خلا ناقص

ہونے کی وجہ سے جب اصلی بار پیما ۳۲ انچ پر ہوتا ہے تو یہ بار پیما ۳۱ انچ ظاہر کرتا ہے اور اس کے خلا کا طول ایک انچ ہوتا ہے اگر تپش میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو بتاؤ کہ جب یہ ناقص بار پیما ½۲۹ انچ پر ہوگا تو اصلی بار پیما کتنے انچ پر ہوگا۔

۱۱ — جب اصلی بار پیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو ناقص خلا والے بار پیما کا ارتفاع ۲۹٫۸ انچ ہوتا ہے، بتاؤ کہ نلی کے اندر کی ہوا کا حجم کرۂ ہوائی کے دباؤ پر کیا ہوگا۔

۱۲ — ایک بار پیما ۳۰ انچ پر ہے اور طربیسلی کے خلا کا طول ۲ انچ ہے اگر ہوا کا ایک حباب جو کرہ ہوائی کے دباؤ پر نلی کے ½ انچ طول کو گھیرتا ہے خلا کے اندر داخل کر دیا جائے تو بتاؤ کہ پارہ کی سطح ۳ انچ نیچے اُتر جائے گی۔ نیز ثابت کرو کہ جب ناقص بار پیما لا انچ پر ہو تو اصلی بار پیما

$$\text{لا} + \frac{15}{32 - \text{لا}}$$ انچ پر ہوگا۔

۱۳ — جب صحیح بار پیما کے ارتفاع ۳۰٫۴ اور ۲۹٫۸ انچ ہوں تو ایک ناقص بار پیما کے ارتفاع بالترتیب ۲۹٫۸ اور ۲۹٫۴ ہوتے ہیں۔ اگر ناقص بار پیما ۲۹ انچ پر ہوگا تو بتاؤ کہ کرہ ہوائی کا دباؤ ۲۹٫۳ انچ ہوگا۔

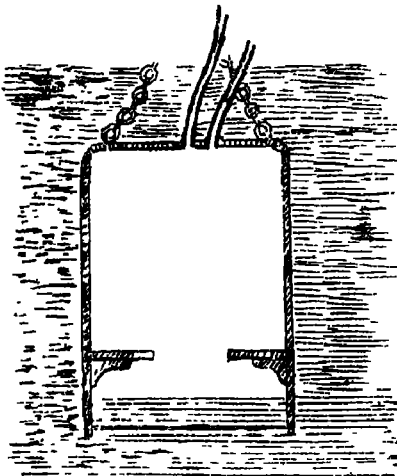
۱۴ — ایک بار پیما کے اندر خلا ئے طربیسلی کا طول ا انچ ہے اور جب اصلی بار پیما ج انچ پر ہو تو یہ آلہ ب انچ پر ہوتا ہے، اگر یہ غلطی ناقص خلا کی وجہ سے پیدا ہو تو بتاؤ کہ اس آلہ کے ظاہری د انچ کے ارتفاع کے متناظر اصلی بار پیما کا ارتفاع

$$\text{د} + \frac{\text{ا}(\text{ج} - \text{ب})}{\text{ا} + \text{ب} - \text{د}}$$ انچ ہوگا۔

باب ہشتم

سیّالات کے خواص کی تشریح کے لئے آلات اور کلیں

۱۲۲۔ ظرفِ غواص۔ یہ دھات کے بنے ہوئے جرس یا اُسطوانے کی شکل کا ایک مجوف ظرف ہوتا ہے جو نیچے کی طرف سے کھلا ہوتا ہے اور اس قدر وزنی ہوتا ہے کہ اپنے ہی وزن سے پانی کے اندر بآسانی ڈوب جاتا ہے اور اُس ہوا کو جو اس کے اندر ہو اپنے ساتھ نیچے لے جاتا ہے، اُس کو ایک زنجیر کے ذریعہ جو اسکے اوپر کے سرے کے ساتھ بندھی ہوتی ہے پانی کے اندر لٹکا دیتے ہیں۔ غوطہ خور اس کے اندر بیٹھکر گہرے پانی کی تہ میں اتر جاتے ہیں اور وہاں جو کام چاہیں اطمینان سے سرانجام دے لیتے ہیں۔

جوں جوں ظرف مذکور پانی کے اندر

اترتا جاتا ہے اس کے اندر کی ہوا کا دباؤ جو ہر صورت میں اس
پانی کے دباؤ کے مساوی رہتا ہے جس کو یہ مس کرتی ہے
بتدریج بڑھتا جاتا ہے۔ پس بائل کے کلیہ کی رو سے ہوا کا
حجم کم ہوتا جاتا ہے اور پانی بتدریج ظرف کے اندر
چڑھتا آتا ہے۔

ہوا کے اس سکڑاؤ کو روکنے کے لئے ظرف کی بالائی
سطح سے ایک نلی پیوستہ ہوتی ہے جو ظرف کی ہوا کو باہر کی
ہوا کے ساتھ وصل کرتی ہے۔ اس نلی کے ذریعہ ظرف مذکور
کے اندر مصنوعی طور پر ہوا بھرتے رہنے سے پانی کی سطح
کو جس بلندی پر چاہیں رکھ سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ اسی
طرح کی ایک اور نلی بھی ہوتی ہے جو خراب ہوا کے اخراج
کی غرض سے لگائی جاتی ہے۔

زنجیر کا تناؤ ظرف کے وزن سے بقدر ہٹائے ہوئے پانی
کے وزن کے کم ہوتا ہے۔ اگر ظرف کے اندر مزید ہوا پمپ
نہ کی جائے تو جوں جوں ظرف نیچے اترتا جائے گا ہٹائے
ہوئے پانی کا وزن کم ہوتا جائے گا اور بنا بریں زنجیر کا تناؤ
دم بدم بڑھتا جائے گا۔

۱۲۴۔ معلوم کثافت والے پانی کے اندر ایک ظرف غواص
لٹکایا گیا ہے۔ اگر اوپر سے مزید ہوا نہ بھری جائے تو

(۱) دی ہوئی گہرائی h پر ہوا کا سکڑاؤ

(۲) اس گہرائی پر زنجیر کا تناؤ

(۳) کرہ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کی اُس مقدار کا حجم جو اِس گہرائی پر پانی کو ظرف سے باہر رکھنے کی خاطر ظرف میں بھری جانی چاہئے۔ معلوم کرو

(۱) فرض کرو کہ ظرف کا طول ب ہے اور ا گہرائی پر اس کے طول لا میں ہوا ہوتی ہے۔ نیز فرض کرو کہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر بار پیما کا ارتفاع ف ہے۔

اب اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ٹ، ظرف کے اندر کی ہوا کا دباؤ ٹَ، اور پانی کے حجم کی اکائی کا وزن و ہو تو

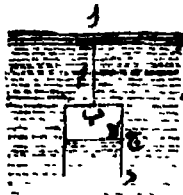
$$ٹ = و ف$$

اور ٹ ب = ٹَ لا [کلیہ بائل کی رو سے]

$$پس\ ٹَ = و \frac{ف ب}{لا}$$

اور توازن کے لئے ضرور ہے کہ ہوا کا دباؤ اور پانی کا دباؤ ظرف کے اندر سطح مشترک پر باہم مساوی ہوں۔

$$\therefore ٹَ = ج\ پر\ کا\ دباؤ = و(لا + ا) + ٹ$$

$$= و(لا + ا + ف)$$

ٹَ کی ان دو قیمتوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$و \frac{ف ب}{لا} = و(لا + ا + ف)$$

لہذا لا² + (ا۱ + ف) لا - ف ب۱ = ۰

یہ درجہ دوم کی ایک مساوات ہے جس کی ایک اصل مثبت ہے اور دوسری منفی - ہمیں صرف مثبت اصل سے بحث ہے، تب ہوا کا دباؤ ظرف کے اندر = ب۱ - لا

(۲) اگر ظرف کی تراش کا رقبہ ر ہو تو خارج شدہ پانی کا حجم ر لا ہوگا اس لئے اس کا وزن و۱ ر لا ہوگا - پس اگر ظرف کا وزن و ہو تو زنجیر کا تناؤ

= و - و۱ ر لا

مکمل طور پر صحیح اور درست نتائج حاصل کرنے کے لئے اس جواب میں اندر کی ہوا کا وزن جمع کرنا چاہئے لیکن چونکہ ہوا کا وزن ظرف کے وزن سے مقابلتہً نہایت قلیل ہوتا ہے اسلئے اس کو نظر انداز کرنے سے اہم غلطی کا اندیشہ نہیں -

(۳) فرض کرو کہ ظرف کا حجم ح ہے اور کرہ ہوائی کے دباؤ پر اس ہوا کا حجم جو پانی کو د کی ہمواری پر رکھنے کے لئے ظرف مذکور کے اندر بھرنی پڑتی ہے حَ ہے -

اس صورت میں ہوا کا دباؤ ظرف کے اندر

= پانی کا دباؤ د پر

= و۱(ب۱ + ا۱) + π = و۱ (ا۱ + ب۱ + ف)

پس کرۂ ہوائی کے دباؤ π یعنی ف و۱ پر (ح + حَ) حجم کی ہوا، دباؤ و۱ (ا۱ + ب۱ + ف) پر حجم ح رکھیگی -

اسلئے بائل کے کلیہ کے مطابق

$$(ح + حَ)\,ف = ح\,(ا + ب + ف)$$

$$\therefore\ حَ = ح\,\frac{ا + ب}{ف}$$ جو حجم مطلوبہ ہے

۲۴۲ا۔ مشق ا۔ ایک ظرف غواص اسطوانہ کی شکل کا ہے اور اور اسکی اندرونی گنجائش ۲۰۰ مکعب فٹ ہے۔ ظرفِ مذکور جس شے کا بنا ہوا ہے اس کا حجم ۲۰ مکعب فٹ ہے، اور ظرف کا وزن ۲ ٹن ہے، ظرف کے ساتھ وزن باندھ کر اس کو ڈبویا گیا ہے۔ اگر پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۳ فٹ ہو تو بتاؤ کہ کس گہرائی پر وزن اتار لئے جائیں کہ ظرف اوپر اٹھنے کے عین نا قابل ہو۔

فرض کرو کہ مطلوبہ گہرائی $ل$ ہے تب اندر کی ہوا کا دباؤ $= و\,(ل + ۳۳)$ جہاں $و$ ایک مکعب فٹ پانی کا وزن ہے۔ اور بائل کے کلیہ کی رو سے

اس دباؤ پر ہوا کا حجم $\times\ و\,(ل + ۳۳) = ۳۳ \times ۲۰۰ \times و$

(بائل کے کلیہ کی رو سے)

اس لئے خارج شدہ پانی کا حجم (مکعب فٹوں میں)

$$= ۲۰ + \frac{۳۳ \times ۲۰۰}{۳۳ + ل}$$

نیز چونکہ اس پانی کا وزن ۲ ٹن ہونا چاہئے، اسلئے

$$۶۲\frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۳۳ \times ۲۰۰}{۳۳ + ل} + ۲۰\right) = ۲۲۴۰ \times ۲$$

$$\therefore\ ل = ۹۴\frac{۲۲۹}{۳۲۳}$$ فٹ

نوٹ۔ ظرف کے اندر کی ہوا کو مس کرنے والے پانی کے دباؤ اور ظرف کے پیندے پر پانی کے دباؤ کے درمیان جو تفاوت ہے اس کو مشق ہذا میں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

مشق ۲۔ دفعہ ۱۲۳ کے ظرفِ غواص کے اندر سوڈا واٹر کی ایک ایسی بوتل کھولی گئی ہے کہ اگر اس کو بیرونی ہوا میں کھولا جائے تو اس سے حجم ح کی گیس خارج ہوتی ہے۔

ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ بقدر $\dfrac{\text{ث ف ح}}{\sqrt{(\text{ل} + \text{ف})^2 + 4\,\text{ب ل ف}}}$ کے کم ہو جاتا ہے

اس میں $\dfrac{\text{ح}}{\text{ف ل}}$ کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

دفعہ ۱۲۳ کے مطابق

$$\text{لا}^2 + \text{لا}\,(\text{ل} + \text{ف}) - \text{ف ب ل} = \quad \ldots\ldots (1)$$

جب بوتل کھولی جاتی ہے تو فرض کرو کہ لا کی قیمت $\text{لا} + \text{ما}$ ہو جاتی ہے۔

نیز گیس کا ابتدائی حجم اور ظرف کے اندر کی ہوا کا مجموعی حجم دونوں ملکر ف دباؤ کے تحت ظرف کے $\text{ب} + \frac{\text{ح}}{\text{ل}}$ طول کو بھرتے ہیں پس بائل کے کلیہ سے $(\text{لا} + \text{ما})(\text{لا} + \text{ما} + \text{ل} + \text{ف}) = (\text{ب ل} + \text{ح})\,\text{ف} \ldots (2)$

مساوات (۱) کو (۲) میں سے تفریق کرنے سے

$$\text{ما}\,[\text{ما} + 2\,\text{لا} + \text{ل} + \text{ف}] = \frac{\text{ح ف}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots (3)$$

چونکہ $\frac{\text{ح ف}}{\text{ل}}$ بہت چھوٹا ہے اس لئے مساواتِ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ما بھی بہت چھوٹا ہے اور بنابریں ما کے مربع کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے، اس امر کا لحاظ رکھتے ہوئے مساوات (۳) یوں

بھی لکھی جا سکتی ہے۔

ح ف / ر = [۲ لا + ل۱ + ف] ل .... (۴)

اب زنجیر کا ابتدائی تناؤ = و - ر لا د۱

اور زنجیر کا آخری تناؤ = و - ر [لا + ما] د۱

پس تناؤ کی کمی = ر ما د۱ = ح د۱ ف / (۲ لا + ل۱ + ف) ..... بمساوات (۴) سے

= ح د۱ ف / √((ل۱ + ف)² + ۴ ف ب۱) .... بمساوات (۱) سے

امثلہ نمبری ۲۵

۱۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کا ارتفاع ۶ فٹ ہے، ظرف کو پانی کے اندر اتنا اتارا گیا ہے کہ اس کی چوٹی ۸۰ فٹ کی گہرائی پر آجاتی ہے۔ اگر باہر کے بار پیما کا ارتفاع ½ ۳۳ فٹ ہو تو اندر کی ہوا کا دباؤ معلوم کرو۔

۲۔ اگر ایک ظرف غواص کو ہوا سے ہمیشہ بھرا ہوا رکھا جائے تو بتاؤ کہ کس گہرائی پر اس کے اندر کے بار پیما کا ارتفاع ۳۰ انچ سے ۳۱ انچ ہو جائے گا جبکہ پارہ کی کثافت اضافی ½ ۱۳ فرض کی جائے۔

۳۔ پانی کے اندر ایک ظرف غواص کے نیچے اترنے سے پارہ ½ ۱۲ انچ اوپر چڑھ جاتا ہے، بتاؤ کہ ظرف سطح کے نیچے کس گہرائی پر ہے۔ (پارہ کی کثافت اضافی = ۱۳٫۶)

۴۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کا ارتفاع ۹ فٹ ہے

اس کو پانی کے اندر اتنا غرق کر دیا گیا ہے کہ اس کے اندر کے پانی کی سطح باہر کے پانی کی سطح سے ۱۷ فٹ نیچے ہے، اگر پانی کے بار پیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو تو بتاؤ کہ ظرف کا پیندا کس گہرائی پر ہے۔ نیز اگر ظرف کی تراش کا رقبہ ۲۵ مربع فٹ ہو تو بتاؤ کہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر کی ہوا کا کتنا حجم ظرف کے اندر بھرا جائے کہ ظرف کے اندر سے کل پانی خارج ہو جائے۔

۵۔ ایک ظرف غواص کو جس کی گنجائش ۱۲۵ مکعب فٹ ہے نمکین پانی کے اندر ۱۰۰ فٹ کی گہرائی تک غرق کیا گیا ہے۔ اگر نمکین پانی کی کثافتِ اضافی ۱۰۲۰ ہو اور پانی کے بار پیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو تو کرہ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کی جو مقدار ظرف کو بھر سکے اس کا حجم دریافت کرو۔

۶۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ظرفِ غواص ہے جس کا پیندا پانی کے نیچے ۱۷ فٹ کی گہرائی پر ساکن ہے، اوپر سے ہوا پمپ کرکے اندر سے پانی کو کلیتہً خارج کر دیا گیا ہے۔ جو ہوا اب ظرف کے اندر ہے اس کی کمیت کا مقابلہ اس ہوا کی کمیت کے ساتھ کرو جو کرہ ہوائی کے دباؤ پر ظرف کو عین بھرنے کے لئے کافی ہو، پانی کا بار پیما ۳۴ فٹ پر ہے۔

۷۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ظرف غواص ۱۰ فٹ اونچا ہے۔ اسکو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ پانی اسکے اندر ۲ فٹ اوپر چڑھ آتا ہے۔ اب اسکے اندر اتنی ہوا اور پمپ کردی جاتی ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ پر ظرف کا $\frac{۶۷}{۴۴}$ واں حصہ بھر سکے، ایسا

کرنے سے پانی ایک فٹ نیچے اتر جاتا ہے۔ ظرف کی چھتّ کی گہرائی اور نیز پانی کے بار پیما کا ارتفاع معلوم کرو۔

۸۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرفِ غواص کو اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کے دسویں حصہ میں پانی چڑھ آتا ہے، اگر پانی کے بار پیما کا ارتفاع ۳۳ فٹ ۹ انچ ہو اور پارہ کی کثافتِ اضافی ۱۳٫۵ ہو تو بتاؤ کہ ظرف کے اندر ایک معمولی بار پیما کا ارتفاع کیا ہوگا، نیز معلوم کرو کہ ظرف کے اندر پانی کی سطح باہر کے پانی کی سطح سے کتنی نیچی ہوگی۔

۹۔ ایک ظرف غواص کو یکساں رفتار سے پانی کے اندر غرق کیا جاتا ہے اور بذریعہ پمپ اس کے اندر متواتر اتنی ہوا داخل کی جاتی ہے کہ ظرف ہمیشہ ہوا سے عین بھرا رہتا ہے۔ معلوم کرو کہ جوں جوں ظرف نیچے اترتا جاتا ہے اس ہوا کی مقدار (یعنی کمیت) جو بذریعہ پمپ داخل کی جاتی ہے فی ثانیہ کس شرح سے بدلتی ہے؟

۱۰۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کا حجم ح اور ارتفاع $\frac{ف}{۴}$ ہے جہاں ف پانی کے بار پیما کا ارتفاع ہے، ظرف کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کا نچلا سرا سطح کے نیچے ن ف کی گہرائی پر ہے، اگر اب ظرف کے $\frac{۱}{۵}$ حصہ میں پانی ہو تو ثابت کرو کہ ظرف کے اندر جو ہوا ہے اس کا حجم کرہ ہوائی کے دباؤ پر

$$\frac{۴}{۵}\left[ن + \frac{۱۹}{۲۰}\right] ح$$ ہوگا۔

۱۱۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرفِ غواص کو پانی کے اندر غرق کیا گیا ہے، جب ظرف کے اندر $\frac{1}{3}$ حصہ میں پانی بھر جائے تو ظرف کی چوٹی جس گہرائی پر ہوتی ہے وہ اس گہرائی کی $3\frac{1}{3}$ گنی ہے جبکہ ظرف کے اندر $\frac{1}{4}$ حصہ میں پانی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ ظرف کا ارتفاع پانی کے بار پیما کے ارتفاع کا $\frac{1}{3}$ ہے۔

۱۲۔ ایک ظرفِ غواص کی چوٹی میں ایک چھوٹا سوراخ کر دیا گیا ہے کیا پانی اندر جائے گا یا ہوا باہر آئے گی؟

۱۳۔ لکڑی کا ایک ٹکڑا پانی میں آدھا ڈوبا رہتا ہے، اس کو ایک ایسے ظرفِ غواص کے اندر ڈال دیا گیا ہے جس کا ارتفاع ۱۰ فٹ اور قطر ۸ فٹ ہے اور جس کی چوٹی پانی کی سطح کے نیچے ۷۴ فٹ کی گہرائی پر ہے۔ اگر پانی کے بار پیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو اور ہوا کی کثافت اضافی کرہ ہوائی کے دباؤ پر ک ہو تو بتاؤ لکڑی کا کتنا حصہ اب پانی کے اندر ڈوبا رہے گا۔

۱۴۔ ایک مخروطی ظرفِ غواص کو جس کے محور کا طول ۱۶ فٹ ہے پانی کے اندر اتارا گیا ہے، جب اس کا راس سطح سے ۳۲ $\frac{2}{9}$ فٹ کی گہرائی پر ہوتا ہے تو ظرف کے اندر ۴ فٹ کی اونچائی تک پانی چڑھ آتا ہے، پانی کے بار پیما کا ارتفاع معلوم کرو۔

۱۵۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اندر کی ہوا اس کے اندرونی حجم کا $\frac{2}{3}$ حصہ گھیرتی ہے، اس کے بعد ظرف میں اتنی ہوا اور بھر دی جاتی ہے جس کی مقدار اندر کی ہوا کے نصف کے مساوی ہے، بتاؤ کہ ظرف غواص کو

اور کتنا غرق کیا جائے کہ اس کے نصف حصہ میں ہوا رہ جائے۔
۱۶۔ ایک ظرفِ غواص کی اونچائی ل فٹ ہے، اس کے اندر پارہ کا ایک بار پیما ہے جس کا ارتفاع باہر کی ہوا میں ف انچ ہوتا ہے اور اندر کی ہوا میں فَ انچ، ظرف کی چوٹی کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے محسوب کرو جب ظرف کی شکل (۱) مخروط ہو (۲) اسطوانہ ہو۔
۱۷۔ ایک کھلے ظرف کی کثافت پانی کی کثافت سے زیادہ ہے، ظرف کا منہ نیچے کی طرف کرکے اس کو پانی کے اندر دھکیلا گیا ہے، ثابت کرو کہ ایک خاص گہرائی تک غرق کرنے کے بعد اس کا توازن غیر قائم ہو جائے گا۔
۱۸۔ ایک ظرفِ غواص کی شکل اسطوانہ کی ہے اور اس کا ارتفاع ا ہے، ظرف کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کی چوٹی کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے فؔ ہے اور اس وقت ظرف کا آدھا حصہ پانی سے بھر جاتا ہے۔ اب اگر اتنی ہوا اور پمپ کی جائے کہ ظرف کا سب پانی خارج ہو جائے تو ثابت کرو کہ فاصلہ ۴ ف - ۲فؔ اور نیچے اتر جانے سے آدھے ظرف میں پھر پانی بھر جائے گا جہاں ف پانی کے بار پیما کا ارتفاع ہے۔
۱۹۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کا ارتفاع ۱۰ فٹ ہے اور اندرونی نصف قطر ۳ فٹ، اس کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کی چوٹی ۱۰۰ فٹ کی گہرائی پر ہے۔ اب اگر ظرف کے اندر کی ہوا کی تپش ۲۰° سنٹی گریڈ سے ۱۵° سنٹی گریڈ کر دی جائے

اور پانی کے بار پیما کا ارتفاع اسوقت ۳۰ فٹ ہو تو ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ ۶۷ پونڈ زیادہ ہو جائے گا۔

۲۰- اسطوانہ کی شکل کا ایک ظرفِ غواص ہے جس کی عمودی تراش کا رقبہ ر ہے، ظرف کو پانی کے اندر لٹکایا گیا ہے اور اس کی ہموار چوٹی کی گہرائی سطح آب سے ل ہے اور اندر کی ہوا ظرف کے طول ب کو گھیرے ہوئے ہے، ایک آدمی جو ظرف کے اندر پہلے تختی پر بیٹھا ہوا تھا، ظرف کے پانی میں گر پڑتا ہے اور تیرنے لگتا ہے۔ اگر آدمی کا حجم ر عہ ہو اور اس کی کثافت اضافی ض ہو تو ثابت کرو کہ (۱) ظرف کے اندر پانی اوپر چڑھ جاتا ہے اور (۲) پانی کی جو مقدار اب ظرف کے اندر ہے وہ پہلی مقدار کی نسبت کم ہے۔

نیز سہارنے والی زنجیر کے تناؤ میں جو تبدیلی واقع ہوئی ہے اسکو محسوب کرو۔

[جس ہوا کو آدمی ہٹائے ہوئے ہے اس کے وزن کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے]

(۱) ابتدا میں ظرف کے اندر کی ہوا کا حجم = ر (ب - عہ)
اگر ظرف کے اُس حصہ کا طول جس کے اندر آخر میں ہوا ہے ب - بہ ہو تو اس وقت ہوا کا حجم = ر (ب - بہ) - آدمی کا وہ حجم جو پانی سے باہر ہے۔

= ر (ب - بہ) - (ر عہ - ر ض عہ) کیونکہ جو پانی آدمی نے ہٹا دیا ہے اس کا حجم ر ض عہ ہے

= ر (ب - بہ - عہ + عہ ض)

پس اگر ہوا کا دباؤ ابتدا میں ﺩ َ اور آخر میں ﺩ ً ہو تو بائل کے کلیہ سے

ر (ب - عہ) × ﺩ َ = ر (ب - بہ - عہ + عہ ض) × ﺩ ً

لیکن چونکہ دفعہ ۱۲۳ کے مطابق

ﺩ َ = و (ب + ا + ف۱) اور ﺩ ً = و (ب - بہ + ا + ف۱)

جہاں ف۱ پانی کے بارپیما کے ارتفاع کو تعبیر کرتا ہے۔

لہٰذا (ب - عہ) (ب + ا + ف۱) = (ب - بہ - عہ + عہ ض) (ب - بہ + ا + ف۱)

∴ بہ۲ - بہ [۲ب + ا + ف۱ - عہ + عہ ض] + عہ ض (ب + ا + ف۱) = ۰

.........(۱)

جو بہ میں درجہ دوم کی ایک مساوات ہے، ظاہر ہے کہ اس کی دوسری رقم منفی ہے اور تیسری مثبت۔ اس لئے اس کی اصلیں مثبت ہیں۔

یعنی بہ مثبت ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ پانی اوپر چڑھ جاتا ہے

(۲) اگر ظرف کا کل ارتفاع ف ہو تو اس کے اندر پانی کی مقدار ابتدا میں

= ر (ف - ب)

اور آخر میں = ر [ف - (ب - بہ)]۔ اس پانی کی مقدار جس کو آدمی نے ہٹا دیا ہے

= ر (ف - ب + بہ) - ر عہ ض

پس پانی کی مقدار ابتدا میں ـ پانی کی مقدار آخر میں

= ل ع ض - ل بہ = - ل (بہ - ع ض) ..... (۲)

لیکن مساوات (۱) بشکل ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے

(بہ - ع ض)(بہ - ۲ ب - ا - ش ا + ع) = ع ض (ب - ع ...

دائیں جانب کا دوسرا جزو ضربی صریحاً منفی ہے اور بائیں جانب کا رکن مثبت ہے اس لئے بہ - ع ض منفی ہے،

لہذا مساوات (۲) کے بائیں جانب کا رکن مثبت ہے۔

پس پانی کی جو مقدار ظرف کے اندر آدمی کے گرنے سے پہلے تھی وہ اُس مقدار کی نسبت زیادہ ہے جو بعد میں ظرف کے اندر رہ جاتی ہے۔

(۳) ابتدا میں زنجیر کا تناؤ

= ظرف کا وزن + آدمی کا وزن ـ ہٹائے ہوئے پانی کا وزن

= و + ل ع ض و‌ا - ل ب و‌ا

آخر میں زنجیر کا تناؤ

= و - ل (ب - بہ) و‌ا

∴ ابتدائی تناؤ ـ آخری تناؤ = ل ع ض و‌ا - ل بہ و‌ا

= ل و‌ا (ع ض - بہ) = مثبت، جیسا کہ مساوات (۲) میں

پس زنجیر کا تناؤ پہلے کی نسبت کم ہو جاتا ہے۔

۲۱ـ ایک ظرفِ غواص کو پانی کے اندر اتنا ڈبویا گیا ہے کہ اسکی چوٹی سطح کے نیچے گہرائی ا پر ہے اور اس کے اندر جو ہوا ہے اس کی بلندی لا ہے، اب ظرف کے اندر پانی کا

ایک ڈول اوپر کھینچا جاتا ہے جس کا وزن ایک قلیل مقدار و کے مساوی ہے۔ اگر پانی کے بار پیما کا ارتفاع ف ہو تو ثابت کرو کہ زنجیر کے تناؤ میں تقریباً $\frac{\text{و ا}}{\text{ف} + \text{ا} + ۲\,\text{ا۹}}$ کا اضافہ ہو جاتا ہے

۲۲۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف غواص کا ارتفاع ا ہے اور اس کا اندرونی حجم اتنا ہے کہ اس کے اندر و وزن کا پانی آسکتا ہے۔ ظرف کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اسکے بالاترین نقطہ کی گہرائی گ ہے، اگر تپش ت_0 سنتی گرید سے بڑھا کر ت_1 سنتی گرید کردی جائے تو ثابت کرو کہ سہارنے والی زنجیر کے تناؤ میں تقریباً $\frac{\text{ع}(\text{ت}_1 - \text{ت}_0)}{1 + \text{ع ت}_0} \times \frac{\text{و ف}}{\sqrt{(\text{ف}+\text{گ})^۲ + ۴\,\text{ا ف}}}$ کی کمی واقع ہو جاتی ہے جہاں ف پانی کے بار پیما کے ارتفاع کو تعبیر کرتا ہے اور ع، $\frac{1}{۲۷۳}$ کے مساوی ہے۔

۲۳۔ ایک ظرفِ غواص کی شکل مخروط کی ہے جس کا ارتفاع ا ہے، ظرف کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کے راس کی گہرائی گ ہے، ثابت کرو کہ ظرف کے اس حصہ کی اونچائی جس کے اندر ہوا ہے مساوات $\text{لا}^۳ + \text{لا}^۲(\text{ف}+\text{گ}) = \text{ا}^۳\text{ف}$ سے حاصل ہوتی ہے جہاں ف پانی کے بار پیما کا ارتفاع ہے اگر اندر کی ہوا کی تپش ت° سے بڑھا کر $(\text{ت} + \text{ت}_1)^\circ$ کردی جائے تو ثابت کرو کہ سہارنے والی زنجیر کا تناؤ بقدر $\frac{۳\,\text{ع ت ف و}}{۳\text{ف} + ۳\text{گ} + ۴\text{لا}}$ کے

کم ہو جاتا ہے جہاں و سے مراد اس پانی کا وزن ہے جو مخروط کے اندر آسکتا ہے، ع پھیلاؤ کی قدر ہے اور ع کے مربعوں کو نظر انداز کردیا گیا ہے۔

۴۲- ایک ظرفِ غواص اسطوانہ کی شکل کا ہے اور اس کا ارتفاع ب ہے۔ ظرف کو پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اس کا بالا ترین نقطہ گہرائی ا پر ہے، اگر بارپیما کے چڑھ جانے سے ظرف کی چوٹی پر دباؤ بقدر د کے بڑھ جائے تو ثابت کرو کہ زنجیر کے تناؤ میں تقریباً $\frac{د}{۲}\left[۱-\frac{ا+ف}{\sqrt{(ا+ف)^{۲}+۴ب ف}}\right]$ کی تبدیلی واقع ہوگی جہاں ف سے مراد پانی کے بارپیما کا ارتفاع ہے۔

۱۲۵- پچکاری - پمپ کی سادہ ترین شکل ایک معمولی پچکاری ہے۔ اس میں ایک مجوف اسطوانہ ا ب ہے جس کے سرے پر ایک چھوٹی ٹونٹی ج ہے۔ اسطوانہ کے اندر ایک پھنس کر آنے والا ہوا بند فشارہ ہے، پچکاری کے سرے کو مائع کے اندر رکھکر فشارہ کو باہر کی طرف کھینچتے ہیں جو اپنے ساتھ اوپر کی ہوا کو بھی باہر لے آتا ہے اور فشارہ کے نیچے جس حصے میں اس طرح سے خلا واقع ہونا چاہئے تھا اس میں باہر کی ہوا کا دباؤ مائع کو دھکیل دیتا ہے۔

جب اس طرح سے سیال کی کافی مقدار پچکاری کے اندر کھنچ آتی ہے تو پچکاری کو مائع کے باہر نکال لیتے ہیں اور جب نشارہ کو اندر کی جانب دھکیلتے ہیں تو ٹونٹی ج میں سے مائع بڑے زور سے نکلتا ہے۔

۱۲۶۔ تمام پمپوں کی بنیاد چوسنے کے عمل پر ہے کسی نہ کسی طرح کچھ خلا پیدا کیا جاتا ہے اور کرۂ ہوائی کا دباؤ اس خلا کو بھرنے کے لئے مائع کو اندر دھکیل دیتا ہے۔ اسی اصول کو زمانۂ سلف کے محققین اس طرح بیان کرتے تھے کہ "قدرت خلا سے نفرت کرتی ہے" یہ بہت بعد میں ثابت ہوا کہ قدرت کی یہ نفرت پانی کی صورت میں ۳۴ فٹ کی اونچائی سے تجاوز نہیں کرتی۔

۱۲۷۔ کھلمندن کا استعمال چوس پمپ اور ہوا پمپ میں کیا جاتا ہے۔

کھلمندن اس طرح سے بنے ہوئے ہوتے ہیں کہ وہ ہوا، پانی یا کسی دوسری چیز کو ان سوراخوں میں سے جن پر وہ لگے ہوئے ہوں ایک جانب میں تو گزرنے دیتے ہیں لیکن دوسری جانب میں نہیں گزرنے دیتے، تاہم بہترین قسم کے کھلمندنوں میں سے بھی سیال کی کم و بیش مقدار رستی رہتی ہے۔

معمولی قسم کی پھکنی میں کھلمندن چمڑے کی ایک چھوٹی پتی ہوتی ہے جو ایک گول سوراخ کو بند کئے رہتی ہے۔

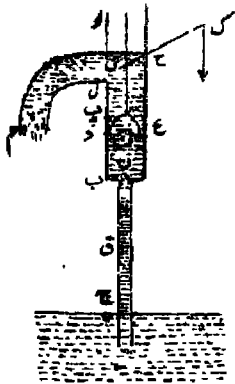
جب پھکنی کو پھیلایا جاتا ہے تو ہوا اس کے اندر داخل ہو
جاتی ہے، لیکن جب اس کو سکیڑا جاتا ہے تو یہ پتی مضبوطی
سے سوراخ پر دب جاتی ہے اور اس کے راستہ سے ہوا
باہر نکلنے نہیں پاتی۔

دفعہ ۱۴۸ میں کھٹکن ل اور ف بالعموم دھات
کے چھوٹے چھوٹے گول قرص ہیں جو اپنے ایک کنارے
کے گرد قبضہ کے ذریعہ گردش کر سکتے ہیں۔ ہوا پمپ میں
کھٹکن چکنائے ہوئے ریشم کا ایک ٹکڑا ہوتا ہے جس کے
دونوں سرے ایک پیتل کی تختی کے شگاف پر جس میں
سے ہوا نکلتی ہے، مضبوطی سے لگا دیتے ہیں۔ اگر تختی کے
اس رخ پر جس پر کہ ریشم لگا ہوتا ہے دباؤ زیادہ ہو تو
ریشم کا ٹکڑا شگاف پر مضبوطی کے ساتھ جم جاتا ہے اور
ہوا دوسری جانب گذرنے نہیں پاتی۔ لیکن اگر دباؤ تختی
کی دوسری جانب زیادہ ہو تو پردہ ہٹ جاتا ہے اور ہوا
اندر داخل ہو جاتی ہے۔

ایک اور قسم کا کھٹکن دفعہ ۱۴۶ کی شکل میں ن پر دکھایا
گیا ہے۔ یہ محض دھات کی ایک گولی ہوتی ہے جو ایک گول
سوراخ پر ٹھیک آجاتی ہے۔ جب اوپر کے دباؤ کی نسبت
نیچے کا دباؤ زیادہ ہوتا ہے تو گولی اوپر اٹھ جاتی ہے اور
سیال اندر داخل ہو جاتا ہے۔

اگرچہ نظری طور پر دباؤ کی خفیف ترین تبدیلی سے بھی

کھلندن کو اوپر اُٹھ جانا چاہئے لیکن عملی طور پر کھلندن کے اُٹھنے کے لئے اس کے دونوں جانب کے دباؤں میں معتدبہ فرق ہونا ضروری ہے۔

۱۴۸۔ معمولی پمپ یا چوس پمپ۔ اس قسم کے پمپ میں دو اسطوانے ا ب اور ب ج ہوتے ہیں اور اوپر کے اسطوانے کی تراش کا رقبہ نیچے کے اسطوانہ کی تراش کے رقبہ کی نسبت زیادہ ہوتا ہے۔ لیکن طول میں نیچے کا اسطوانہ زیادہ ہوتا ہے اور اس کے نیچے کا سرا اُس پانی کی سطح کے نیچے ڈوبا رہتا ہے جس کو اُٹھانا منظور ہوتا ہے اوپر کے اسطوانہ کے اندر ایک انتصابی سلاخ ہوتی ہے جس کے نیچے کے سرے کے ساتھ ایک فشارہ دع لگا ہوتا ہے فشارہ میں ایک کھلندن ف ہوتا ہے جو صرف اوپر کی جانب کھل سکتا ہے۔

یہ فشارہ انتصابی سمت میں ب سے جو دونوں اسطوانوں کا ملتقی ہے ل تک جہاں پمپ کا دہانہ ہے چل سکتا ہے ب پر ایک اور کھلندن ن ہے اور یہ بھی اوپر کی طرف کھلتا ہے۔ سلاخ کو ایک سیدھے یا خمدار بیرم گ ح ک کے ذریعہ چلایا جاتا ہے۔ بیرم کا نصاب ح پر ہے اور ک پر قوت لگائی جاتی ہے۔

پمپ کا عمل۔ فرض کرو کہ ابتدا میں فشارہ اوپر کے اسطوانہ کے نچلے سرے پر ہے اور ابھی پانی نیچے کے اسطوانہ میں داخل نہیں ہوا۔

ک پر شاقولی سمت میں قوت لگانے سے فشارہ ع د اوپر اٹھتا ہے اور اس کا کھلندن ف بند رہتا ہے، اس لئے یہ اوپر کی ہوا کو بھی اپنے ساتھ باہر لے جاتا ہے۔ اس طرح فشارہ مذکور اور کھلندن ن کے درمیان جو ہوا ہے وہ لطیف ہوجاتی ہے اور اس کا دباؤ اُس ہوا کے دباؤ کی نسبت جو ب ج کے اندر ہے کم ہوجاتا ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ کھلندن ن اوپر کی جانب کھل جاتا ہے اور ب ج کی کچھ ہوا اوپر کے اسطوانہ میں چلی جاتی ہے۔ اس طرح سے ب ج کی ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کی نسبت کم ہوجاتا ہے اور حوض میں سے کچھ پانی اسطوانہ ب ج میں چڑھ آتا ہے۔ جب فشارہ ل پر پہنچتا ہے تو اس کی حرکت کی سمت بدل جاتی ہے، اب اس کے اور ن کے درمیان جو ہوا ہے وہ دب جاتی ہے اور اس کا دباؤ بڑھ جاتا ہے جس سے فشارہ ن تو بند ہوجاتا ہے لیکن فشارہ ف کھل جاتا ہے اور ہوا باہر نکل جاتی ہے، ہوا کا یہ اخراج جاری رہتا ہے جب تک کہ فشارہ ن پر پھر نہ آجائے اور پہلی ضرب کا دور پورا نہ ہوجائے۔

چند بار اسی طرح ضربیں لگانے سے پانی سطح ب سے اوپر آجاتا ہے

بشرطیکہ ب ج کا طول پانی کے بار پیما کے ارتفاع سے کم ہو، پمپ کے چلنے کے لئے یہ ایک نہایت اہم اور ضروری شرط ہے۔
[چونکہ کھلمندنوں میں سے کچھ نہ کچھ ہوا رستی رہتی ہے اس لئے عملی طور پر یہ ضروری ہے کہ ب ج کا طول آبی بار پیما کے ارتفاع سے چند فٹ کم ہو]

فشارہ کی ایک اور ضرب لگانے سے کچھ پانی اس کے اوپر چڑھ آئیگا جو فشارہ کو اوپر کھینچتے وقت دہانہ میں سے باہر نکل جائیگا اور نیز فشارہ کے نیچے کا پانی اس کے ساتھ ساتھ اوپر چڑھتا آئیگا بشرطیکہ طول ج ل پانی کے بارپیما کے ارتفاع سے کم ہو۔

اگر مذکورۂ بالا شرط پوری نہ ہو تو پانی ب اور ل کے درمیان کسی نقطہ پ تک چڑھیگا۔ اور فشارہ کو ب سے اوپر کھینچتے وقت صرف وہ پانی جو ب پ کے اندر ہے اوپر اُٹھیگا۔

۱۲۹۔ دو اسطوانوں کی بجائے جن کا اوپر ذکر ہوا ہم صرف ایک اسطوانہ سے کام لے سکتے ہیں بشرطیکہ کھلمندن ن جو اوپر کی جانب کھلتا ہے فشارہ کی سمت کے سب سے نچلے نقطہ سے قدرے نیچے لگایا جائے۔

یہ ضروری نہیں کہ نیچے کا اسطوانہ سیدھا ہو، یہ کسی شکل کا ہوسکتا ہے لیکن یہ ضرور ہے کہ اس کے اوپر کے کنارے ب سے پانی کا فاصلہ بارپیما کے ارتفاع سے تجاوز نہ کرنے پائے۔

چونکہ بالعموم پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ کے قریب ہوتا ہے اس لئے فشارہ کے سب نچلے نقطہ کا فاصلہ حوض سے ۳۴ فٹ سے قدرے کم ہونا چاہئے تاکہ پمپ چل سکے۔

۱۳۰- فشارہ کی سلاخ کا تناؤ- فرض کرو فشارہ کا رقبہ ر پانی کے بارپیما کا ارتفاع ف‍ا اور پانی کے حجم کی ایک اکائی کا وزن و ہے۔

فشارہ کے اوپر اور نیچے کی سطحوں پر جو دباؤ ہیں اُن کے فرق پر فشارہ کی سلاخ کے تناؤ کو غالب آنا پڑتا ہے۔

اولاً فرض کرو کہ پانی نقطہ ب تک نہیں چڑھا بلکہ اس کی سطح ق پر ہے۔ تب

ق کے اوپر کی ہوا کا دباؤ = پانی کا دباؤ ق پر

= دباؤ ج پر - و × ج ق = و (ف‍ا - ج ق)

پس فشارہ کے نیچے کی سطح پر دباؤ ر × و (ف‍ا - ج ق) ہے اور اوپر کی سطح پر دباؤ ر × و ف‍ا ہے۔ لہٰذا اگر مطلوبہ تناؤ ت ہو تو

ت + ر × و (ف‍ا - ج ق) = ر × و × ف‍ا

∴ ت = ر × و × ج ق

ثانیاً فرض کرو کہ پانی ایسے نقطہ پ تک پہنچ گیا ہے جو کھلمندن ن سے اوپر ہے، فشارہ کی سطح میں کے کسی نقطہ پر کا دباؤ

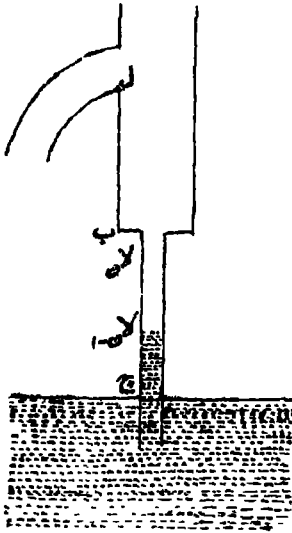
= و × د پ + و ف‍ا = و (ف‍ا + د پ)

نیچے کی سطح کے کسی نقطہ پر کا دباؤ = و ف‍ا - و × ج د = و (ف‍ا - ج د)

پس ت + ر × و (ف - ج د) = ر × و (ف + د پ)

∴ ت = ر × و × ج پ

لہذا دونوں صورتوں میں سلاخ کا تناؤ پانی کے اُس ستون کے وزن کے مساوی ہے جسکی تراش کا رقبہ فشارہ کے رقبہ کے مساوی ہو اور جس کا ارتفاع اُس فاصلہ کے برابر ہو جو پمپ کے اندر اور باہر کے پانی کی سطحوں کے درمیان ہے۔

۱۳۱۔ ن ویں ضرب سے نل کی جس بلندی میں پانی چڑھ جاتا ہے اس کو محسوب کرو۔

دفعہ ۱۲۸ کی شکل اور حروف لیکر فرض کرو کہ ن ویں ضرب کے شروع میں نقطہ لان-۱ تک پانی پہنچ چکا ہے اور ن ویں ضرب کے آخر میں پانی نقطہ لان تک پہنچ جاتا ہے۔

فرض کرو کہ فاصلہ ج لان-۱ = لان-۱

اور فاصلہ ج لان = لان نیز فرض کرو کہ ب ل = ل۱ اور نلی کا طول ج ب = ج۱ اور اوپر کے نل ب ل کی تراش کا رقبہ ر اور نلی ب ج کی تراش کا رقبہ ر۱ ہے۔

فرض کرو کہ جب پانی کی سطح لان-۱ پر ہے اور فشارہ ب پر ہے تو اُس ہوا کا دباؤ جو لان-۱ سے اوپر ہے ح۱ ہے اور بیرونی ہوا کا دباؤ ح ہے

∴ ح = ح۱ + و × لان-۱ (دفعہ ۳۱) . . . . (۱)

جب پانی کی سطح لان پر ہو اور فشارہ ل پر تو فرض کرو کہ لان کے اوپر کی ہوا کا دباؤ پ″ ہے، تب

پ = پ″ + و × لان ... (۲)

اب ضرب کے شروع میں پمپ کے جس حصہ کے اندر ہوا ہے اس کا طول = لان-۱ ب اور اس لئے اس کا حجم = ر × لان-۱ ب

یعنی = ر (ج - لان-۱)

ضرب کے آخر میں یہی ہوا ہے جو اوپر کے نل کے ب ل طول کو اور نیز نیچے کی نلی کے لان ب طول کو بھر دیتی ہے اس لئے اس کا حجم اُس وقت = ر × لان ب + ر × ب ل

یعنی = ر (ج - لان) + ر × ل

پس بائل کے کُلیہ سے

پ′ × {ر (ج - لان-۱)} = پ″ {ر (ج - لان-۱) + ر ل} .... (۳)

پس مساواتات (۱) اور (۲) سے

(پ - و × لان-۱) × ر (ج - لان-۱) = (پ - و لان-۱) {ر (ج - لان) + ر ل}

لیکن اگر پانی کے بارپیما کا ارتفاع ف ہو تو پ = و ف، اس لئے

ر (ف - لان-۱) (ج - لان-۱) = (ف - لان) {ر (ج - لان) + ر ل} .... (۴)

یہ درجہ دوم کی ایک مساوات ہے اور اگر لان-۱ معلوم ہو تو اس سے لان کی قیمت نکل سکتی ہے۔

اگر ن کو بالتواتر ۱، ۲، ۳، .... قیمتیں دی جائیں تو مساوات بالا سے وہ ارتفاع حاصل ہوسکتے ہیں جہاں تک پہلی، دوسری، تیسری.... ضرب کے آخر میں پانی چڑھ جائے گا، نیز چونکہ لا، ج

کے اوپر پہلی ضرب کے شروع میں پانی کی بلندی کو تعبیر کرتا ہے اسلئے یہ صریحاً صفر ہے، پس مذکورهٔ بالا ارتفاع ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوں گے۔

$$\text{ر}_{1}\,\text{ف}_{1}\,\text{ج}_{1} = (\text{ف}_{1} - \text{لا}_{1})\{\text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{1}) + \text{ر}\,\text{ل}_{1}\}$$

$$\text{ر}_{1}(\text{ف}_{1} - \text{لا}_{1})(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{2}) = (\text{ف}_{1} - \text{لا}_{2})\{\text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{2}) + \text{ر}\,\text{ل}_{1}\}$$

$$\text{ر}_{1}(\text{ف}_{1} - \text{لا}_{2})(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{3}) = (\text{ف}_{1} - \text{لا}_{3})\{\text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{3}) + \text{ر}\,\text{ل}_{1}\}$$

وغیرہ وغیرہ

۱۳۲- اگر بڑے نل میں پانی چڑھ آنے سے پیشتر آخری مکمل ضرب ن ویں ہو تو دفعہ ماقبل کے ضابطہ میں خفیف سی تبدیلی کرنی پڑیگی۔

فرض کرو کہ (ن + ۱) ویں ضرب کے آخر میں پانی کی بلندی ب کے اوپر ما ہے، تب دفعۂ سابق کی مساواتیں (۱) اور (۲) حسب ذیل ہوجائینگی۔

$$\text{ہ} = \text{ہ}' + \text{و}_{1}\,\text{لا}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ہ} = \text{ہ}'' + \text{و}_{1}(\text{ج}_{1} + \text{ما}) \quad \ldots (2)$$

نیز $\text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{\text{ن}})$ حجم کی ہوا پھیل کر حجم $\text{ر}(\text{ب ل} - \text{ما})$ یعنی $\text{ر}(\text{ل}_{1} - \text{ما})$ اختیار کرلیتی ہے اسلئے بائل کے کلیہ سے

$$\text{ہ}'' \times \text{ر}(\text{ل}_{1} - \text{ما}) = \text{ہ}' \times \text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{\text{ن}})$$

$$\therefore [\text{ہ} - \text{و}_{1}(\text{ج}_{1} + \text{ما})] \times \text{ر}(\text{ل}_{1} - \text{ما}) = (\text{ہ} - \text{و}_{1}\,\text{لا}_{\text{ن}}) \times \text{ر}_{1}(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{\text{ن}})$$

یعنی $\text{ر}(\text{ف}_{1} - \text{ج}_{1} - \text{ما})(\text{ل}_{1} - \text{ما}) = \text{ر}_{1}(\text{ف}_{1} - \text{لا}_{\text{ن}})(\text{ج}_{1} - \text{لا}_{\text{ن}})$

اس مساوات سے ما کی قیمت نکل سکتی ہے۔

ضرب یا بعد میں پانی نل میں سے نکلنے لگتا ہے۔

۱۴۳۔ مشق ا۔ ایک معمولی پمپ کا بڑا نل ۱۸ انچ لمبا ہے اور اس کے نیچے کا کنارہ پانی کی سطح سے ۱۲ فٹ اونچا ہے۔ اگر چھوٹی نلی کی تراش بڑے نل کی تراش کا $\frac{3}{14}$ ہو تو بتاؤ کہ پہلی ضرب کے آخر میں چھوٹی نلی کے اندر پانی کس بلندی تک اوپر چڑھیگا جبکہ پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۲ فٹ ہو۔

فرض کرو کہ بڑے نل اور نلی کی تراشوں کے رقبے بالترتیب ر اور $\frac{3}{14}$ ر ہیں اور مطلوبہ بلندی لا فٹ ہے۔ نل کے اندر کی ہوا کا حجم ابتدا میں $\left(\frac{3}{14}\text{ر} \times 21\right)$ یعنی $\frac{9\text{ر}}{2}$ مکعب فٹ ہے اور پہلی ضرب کے اثنا میں جب فشارہ اپنے بالاترین محل میں ہوتا ہے اس وقت حجم

$$= \frac{3}{14}\text{ر} \times (21 - \text{لا}) + \text{ر} \times \frac{3}{2} = \text{ر}\left(6 - \frac{3\text{لا}}{14}\right)$$

تب بائل کے کلیہ کی رُو سے اس کا دباؤ

$$= \text{ہ} \frac{\frac{9\text{ر}}{2}}{\text{ر}\left(6 - \frac{3\text{لا}}{14}\right)} = \text{ہ} \frac{21}{28 - \text{لا}}$$

جہاں ہ باہر کی ہوا کے دباؤ کو تعبیر کرتا ہے۔

پس جب پانی لا اونچائی تک ٹھہرا رہے تو اس کے نیچے کے سرے پر ہوا کا دباؤ ہ کے مساوی ہوتا ہے اور اوپر کے سرے پر $\text{ہ} \times \frac{21}{28 - \text{لا}}$ کے

$$\therefore \text{ہ} = \text{و}_1 \text{لا} + \text{ہ} \times \frac{21}{28 - \text{لا}}$$

لیکن $\text{ہ} = \text{ہ} \times 32$

$$\therefore (32 - \text{لا})(28 - \text{لا}) = 21 \times 32$$

$$\therefore \text{لا}^2 - 60\,\text{لا} + 224 = 0$$

∴ $لا_{۱}$ = ۴ فٹ

مشق ۲ - ایک معمولی پمپ کا نل ۲ فٹ لمبا ہے اور اس کا نچلا سرا پانی کی سطح سے ۲۶ فٹ کی بلندی پر ہے، اگر نل کی تراش کا رقبہ نلی کی تراش کے رقبہ کا ۶ گنا ہو اور پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۲ فٹ ہو تو بتاؤ کہ کتنی ضربوں سے پانی نل کے اندر چڑھ آئیگا۔

یہاں ل = ۲، ج = ۲۶، ر = ۶ $ب$ اور $ف_{ب}$ = ۳۲

لہٰذا دفعہ ۱۳۱ کی مساوات (۴) ہوجائیگی۔

$$(۳۲ - لا_{ن-۱})(۲۶ - لا_{ن-۱}) = (۳۲ - لا_{ن})(۲۶ - لا_{ن} + ۲ \times ۶)$$

$$= (۳۲ - لا_{ن})(۳۸ - لا_{ن})$$

اس لئے $لا_{ن} = لا_{ن-۱} + ۶$

(مساوات کی دوسری اصل ۶۴ - $لا_{ن-۱}$ ہے جو ہمارے مفید مطلب نہیں)

اب $لا_{۰}$ = پمپ چلانے سے پہلے پانی کا ارتفاع = ۰

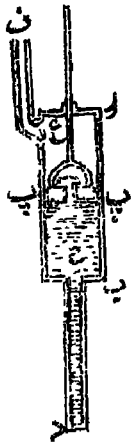
∴ $لا_{۱} = لا_{۰} + ۶ = ۶$، $لا_{۲} = لا_{۱} + ۶ = ۱۲$

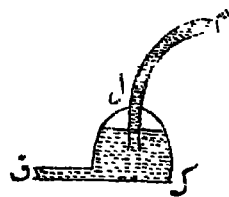
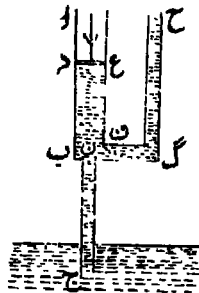
اسی طرح سے $لا_{۳}$ = ۱۸، $لا_{۴}$ = ۲۴، $لا_{۵}$ = ۳۰ جو نلی کے طول سے زیادہ ہے، پس پانچویں ضرب کے آخر میں پانی نل کے اندر چڑھ جائیگا اس لئے چھٹی ضرب کے آخر میں یہ دہانہ میں سے بہنا شروع ہوجائیگا۔

۱۳۴ - اُٹھاؤ پمپ - یہ معمولی پمپ ہی کی ایک تبدیل شدہ صورت ہے، اس میں نل کی چوٹی بند ہوتی ہے اور فشارہ اس چوٹی کی ایک تنگ گردن میں سے پھرتا ہے جس کے بیچ میں سے نہ ہوا گزر سکتی ہے اور نہ پانی۔

اس کے دہانہ کی تراش معمولی پمپ کے دہانہ کی تراش سے

کم ہوتی ہے اور چونکہ دہانہ کا رُخ نیچے کیطرف ہونے کی بجائے اوپر کی طرف ہوتا ہے اس لئے ہم پانی کو جس بلندی تک چاہیں پہنچا سکتے ہیں۔

دہانہ میں مقام ع پر ایک کھلمنذ ہوتا ہے جو صرف اوپر کی طرف کھل سکتا ہے جب فشارہ اوپر کو حرکت کرتا ہے تو یہ کھلمنذن کھل جاتا ہے اور پانی دہانہ میں داخل ہوجاتا ہے لیکن جب فشارہ نیچے اترتا ہے تو یہ کھلمنذن بند ہوجاتا ہے اور پھر اس وقت کھلتا ہے جب فشارہ اوپر کی سمت میں حرکت کرنے لگتا ہے۔

اس عمل سے پانی کو بہت بڑے ارتفاع تک اُٹھایا جاسکتا ہے بشرطیکہ پمپ کافی مضبوط ہو۔

۱۳۵- داب پمپ۔ اس پمپ میں فشارہ د ع ٹھوس ہوتا ہے اور اس کے اندر کوئی کھلمنذن نہیں ہوتا لیکن نیچے کی نلی ب ج میں ب پر ایک کھلمنذن ہوتا ہے جو معمولی پمپ کے کھلمنذن کی مانند اوپر کو کھلتا ہے۔

اوپر کے نل کے ساتھ ایک اور انتصابی نلی گ ح ملحق ہوتی ہے اور ان کے مقام اتصال یا ملتقی پر ایک اور کھلندن ف ہوتا ہے جو باہر کی جانب کھلتا ہے۔

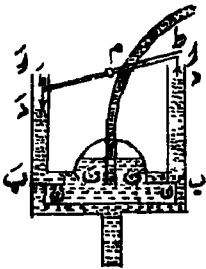
فشارہ کی نزولی حرکت سے ہوا ف میں سے خارج ہوجاتی ہے اور صعودی حرکت سے کھلندن ف تو بند ہوجاتا ہے لیکن ن کھل جاتا ہے اور معمولی پمپ کی طرح پانی ب ج میں چڑھ آتا ہے، جب متعدد مرتبہ یہی عمل کرنے سے پانی کی ہمواری ب سے اوپر ہوجاتی ہے تو فشارہ کی نزولی حرکت سے پانی ف میں سے گزر کر نلی گ ح میں داخل ہوجاتا ہے لیکن صعودی حرکت سے ف بند ہوجاتا ہے اور پانی بڑے نل میں واپس نہیں آسکتا۔

اسی طرح کی مسلسل ضربوں سے بالآخر پانی کو ایسے ارتفاع تک پہنچایا جاسکتا ہے جو فشارہ کے دباؤ اور پمپ کی مضبوطی پر منحصر ہوتا ہے۔

داب پمپ کا جو بیان اوپر ہوا ہے اس سے ظاہر ہے کہ گ ح میں سے پانی کی مسلسل رو نہیں نکلیگی بلکہ پانی صرف اسی وقت نکلیگا جبکہ فشارہ نیچے کی طرف جارہا ہو۔

اس غرض کے لئے کہ پانی کی دھار مسلسل نکلتی رہے بعض اوقات نلی ف گ کے بیچ میں ایک حجرہ لگا دیتے ہیں جس کے اندر کچھ ہوا ہوتی ہے حجرہ کے اندر سے ایک نلی ل م نکلتی ہے جس کا ایک سرا حجرہ کے پیندے

کے بہت قریب رکھتے ہیں اور دوسرا جسقدر چاہیں بلند کیا جاسکتا ہے
جب فشارہ د ع نیچے اتر رہا ہو تو اس حجرہ کی ہوا دب
جاتی ہے اور ساتھ ہی پانی نلی ل م میں سے اوپر دھکیلا جاتا ہے
جب فشارہ اوپر کو جارہا ہو تو کھلندن ف بند ہوجاتا ہے
اور حجرہ کے اندر کے پانی پر فشارہ کے دباؤ کا اثر نہیں
رہتا، اس طرح حجرہ کے اندر کی وہ ہوا جو فشارہ کے دباؤ
کے زیر عمل سکڑ گئی تھی اپنے ابتدائی حجم پر واپس آجانے کی
کوشش کرتی ہے، اسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ حجرہ کے اندر کے
پانی پر مسلسل دباؤ پڑا رہتا ہے اور یہ پانی نلی کے اندر
دھکیلا جاتا ہے، اس طرح نلی ل م سے پانی کی ایک مسلسل
دھار نکلتی رہتی ہے۔

۱۳۶۔ آگ بجھانے کا انجن۔ آگ بجھانے کا دستی انجن اصولاً
ایک داب پمپ ہوتا ہے جس کے اندر ہوا کا ایک حجرہ ہوتا ہے
فرق صرف یہ ہے کہ اس میں ایک کی بجائے دو نل ا ب
اور اَ بَ ہوتے ہیں اور یہ دونوں ہوا کے حجرہ کے ساتھ
منسلک ہوتے ہیں۔ ان نلوں میں
دو فشارے د اور دَ ایسے
ہوتے ہیں کہ جب ایک فشارہ
نیچے کو جاتا ہے تو دوسرا اوپر اٹھ آتا ہے۔
فشاروں کے سرے ط اور طَ
ایک سلاخ ط م طَ کے ساتھ

پیوستہ ہوتے ہیں جو ایک ثابت نصاب م کے گرد گھوم سکتی ہے، اس قسم کے انتظام سے قریب قریب ایک مسلسل دھار حاصل ہوتی ہے کیونکہ جب فشارے اپنی حرکت کی سمت بدلتے ہیں تو ہوا کا حجرہ اپنے دباؤ کی وجہ سے رَو کا تسلسل قائم رکھتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۶

۱۔ پارہ کے ایک بارپیما کا ارتفاع ۲۸ انچ سے ۳۱ انچ ہوجاتا ہے، اگر پارہ کی کثافت اضافی ۶ء۱۳ ہو تو بتاؤ کہ اس تبدیلی کے جواب میں اُس پانی کے ارتفاع میں جو معمولی پمپ کے ذریعہ اُٹھایا جاسکتا ہے کیا تبدیلی واقع ہوگی۔

۲۔ ایک معمولی پمپ کے ذریعہ گیس کے تیل کے ایک کنوئیں سے تیل نکالنا منظور ہے، اگر تیل کی کثافت اضافی ۸ء ہو اور پانی کا بارپیما ۳۳ فٹ ۸ انچ پر ہو تو بتاؤ کہ پمپ کا نچلا کھلسندن کنوئیں میں تیل کی سطح کے اوپر زیادہ سے زیادہ کتنی اونچائی پر لگایا جاسکتا ہے۔

۳۔ سمندر کی لہر سے ایک تالاب پانی سے بھر گیا ہے جس کی کثافت اضافی ۱۰۲۵ء۱ ہے، پانی اُتر جانے پر تالاب کو ایک ایسے معمولی پمپ کے ذریعہ خالی کرنا مقصود ہے جس کے نل کا نچلا کھلسندن تالاب کی سطح کی ہمواری پر ہے، اگر پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ۲ انچ ہو تو بتاؤ کہ تالاب کی زیادہ سے زیادہ گہرائی کیا ہوسکتی ہے کہ اس کو اس طرح خالی کرنا ممکن ہو۔

۴- ایک پمپ کے نل کے ایک فٹ طول میں جو پانی آسکتا ہے اسکا وزن ایک گیلن (۱۰ پونڈ) ہے، پمپ کا دہانہ کنوئیں کے پانی کی سطح سے ۲۴ فٹ اونچا ہے اور ہر ضرب میں پمپ کا فشارہ ۴ انچ حرکت کرتا ہے، بتاؤ کہ ہر ایک ضرب میں کتنے فٹ پونڈ کام ہوتا ہے

۵- ایک پمپ کا ثابت کھلندن پانی کی سطح کے اوپر ۲۹ فٹ کی بلندی پر ہے، اس کے فشارہ کی ضرب کا کل طول ۶ انچ ہے اور اسکی سعت کا سب سے نچلا مقام ثابت کھلندن سے ۴ء انچ اونچا ہے، اگر پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۲ فٹ ہو تو بتاؤ کہ پمپ سے نل کے اندر پانی پہنچ سکتا ہے یا نہیں۔

۶- ایک معمولی پمپ کی نلی کا طول پانی کی سطح کے اوپر ۱۶ فٹ ہے اور اس کی تراش کا رقبہ نل کی تراش کے رقبہ کا $\frac{1}{16}$ ہے، اگر پانی کا بارپیما ۳۲ فٹ پر ہو تو معلوم کرو کہ فشارہ کی ضرب کا طول کیا ہونا چاہئے کہ پہلی ضرب کے آخر میں پانی نل کے اندر داخل ہوجائے۔ نیز بتاؤ کہ اگر یہ طول ایک فٹ ہو تو پہلی ضرب کے آخر میں پانی کس بلندی تک چڑھیگا۔

۷- اٹھاؤ پمپ کے ذریعہ پانی کو ایک ایسے مقام تک پہنچانا مقصود ہے جسکا انتصابی ارتفاع ۲۰۰ فٹ ہے، اگر فشارہ کا رقبہ ۱۰۰ مربع انچ ہو تو اس کے اپنے وزن کے علاوہ اس بڑی سے بڑی قوت کی مقدار معلوم کرو جو فشارہ کو اٹھانے کے لئے درکار ہوگی۔

۸- ایک دباؤ پمپ کے فشارہ کا رقبہ ۱۰ مربع انچ ہے اس پمپ سے فشارہ کے اوپر ۶۰ فٹ کی بلندی تک پانی اوپر اٹھایا جاتا ہے، بتاؤ کہ فشارہ کو

چلانے کے لئے کتنی قوت درکار ہوگی۔

۹۔ ایک دباؤ پمپ کے ذریعہ ایک کنوئیں سے تالاب تک پانی اٹھانا مقصود ہے۔ پمپ کے [illegible] کا قطر [illegible] انچ ہے اور فشارہ کا پیندا کنوئیں کے پانی کی سطح سے ۲۰ فٹ اوپر اور تالاب کے پانی کی سطح سے ۱۰۰ فٹ نیچے ہے۔ اگر کھلندنوں کے اوزان اور رگڑ کو نظر انداز کیا جائے تو بتاؤ کہ (۱) فشارہ کو اٹھانے اور (۲) فشارہ کو دبانے کے لئے کم از کم کتنی قوت درکار ہوگی جبکہ پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہے۔

۱۰۔ جب پانی معمولی پمپ کے دہانہ تک پہنچ جائے تو بتاؤ کہ اس کے بعد کی ہر ایک ضرب میں کتنا کام کرنا پڑتا ہے۔

۱۱۔ ایک دباؤ پمپ کے ذریعہ پانی کو ۴ میٹر کی گہرائی سے اٹھا کر ۱۰ میٹر کی بلندی تک پہنچانا مقصود ہے۔ اگر فشارہ کا قطر ۲۰ سنٹی میٹر ہو تو فشارہ کو اوپر اٹھانے کے لئے اور نیچے دبانے کے لئے اس کی سلاخ پر جو قوتیں لگانی پڑینگی اُن کی جداگانہ مقداریں معلوم کرو۔

۱۲۔ ایک معمولی پمپ کے اسطوانہ اور نل کی تراشیں باہم مساوی ہیں اور فشارہ کی پہلی ضرب سے اسطوانہ کے اندر پانی جس بلندی تک اوپر چڑھتا ہے اتنی ہی مزید بلندی تک دوسری ضرب سے چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ پانی کے بارپیما کا ارتفاع کنوئیں کی سطح اور فشارہ کی درمیانی فاصلہ کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے اوسطِ حسابی کے مساوی ہے۔

۱۳۔ ایک معمولی پمپ کا نچلا کھلندن پانی کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ کی بلندی پر ہے اور نل کا رقبہ نیچے کی نلی کے رقبہ کا ۵ گنا ہے۔ اگر

پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہو اور پہلی ضرب کے آخر میں پانی نیچے کے کھلندن کی عین ہمواری تک آجائے تو فشارہ کی سعت کا طول محسوب کرو۔

۱۴۔ ایک پمپ کا نچلا کھلندن پانی کی سطح سے ۲۸ فٹ کی بلندی پر ہے فشارہ کی ضرب کا پورا طول ۹ انچ ہے۔ اگر نچلے کھلندن سے فشارہ کا فاصلہ اُس وقت جبکہ یہ اپنے سب سے نچلے مقام پر ہو ۳ انچ ہو تو بتاؤ کہ پمپ کے نل کے اندر پانی چڑھ سکتا ہے یا نہیں' نیز دریافت کرو کہ زیادہ سے زیادہ کس بلندی تک پانی چڑھ سکتا ہے۔ پانی کے بارپیما کا ارتفاع ۳۴ فٹ ہے۔

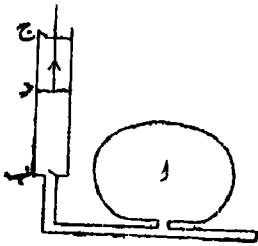
(چونکہ فشارہ نل کے بیندے کے کھلندن تک نہیں پہنچ سکتا اسلئے ظاہر ہے کہ فشارہ کے عین کھلندن تک پہنچنے کی صورت میں جس گہرائی سے پانی اُٹھانا ممکن تھا اب اس کی نسبتاً مقابلۃً کم گہرائی سے پانی اٹھانا ممکن ہوگا)

۱۵۔ ثابت کرو کہ دوسری ضرب کے آخر میں پانی نل کے اندر آجائیگا اگر

$$ف^۲\left[۱-\frac{ج}{ن ل}\right]\left[۲-\frac{ج}{ن ل}\right]-ف\left[۴ج+ن ل-۲\frac{ج^۲}{ل}\right]+ج\left[۲ج+ن ل\right]=۰$$

جہاں ج اور ل بالترتیب نیچے اور اوپر کے نلوں کے طول ہیں' ف پانی کے بارپیما کا ارتفاع ہے اور ن وہ نسبت ہے جو بڑے نل کی تراش کے رقبہ کو چھوٹے نل کی تراش کے رقبہ سے ہے۔

۱۶۔ مشینوں کی دوسری قسم میں ہوا پمپ شامل ہیں' ان کے ذریعہ ایک ایسے ظرف میں سے جس میں خلا پیدا کرنا مقصود ہو ہوا خارج کی جاسکتی ہے۔

سمیٹن کا ہوا پمپ - یہ پمپ ایک اسطوانہ ب ج پر مشتمل ہوتا ہے جس میں ب اور ج پر دو کھلندن ہوتے ہیں جو اوپر کی طرف کھلتے ہیں اور ان کھلندنوں کے مابین ایک فشارہ چلتا ہے، اس فشارہ میں د پر ایک اور کھلندن ہوتا ہے اور یہ بھی اوپر ہی کی طرف کھلتا ہے۔

یہ کھلندن بہت احتیاط کے ساتھ حتی الوسع ہوا بند بنائے جاتے ہیں۔

اسطوانہ ب ج کے نچلے سرے ب کو ایک نلی کے ذریعہ ظرف یا قابلہ ا کے ساتھ جس میں سے ہوا خارج کرنا مقصود ہوتا ہے منسلک کردیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ پمپ چلانے سے پہلے فشارہ ب پر ہے جب اسکو اوپر اُٹھایا جاتا ہے تو اس کے اور ب کے درمیان خلا پیدا ہوجاتا ہے اس لئے اس ہوا کا دباؤ جو ب کے نیچے ہے کھلندن ب کو کھول دیتا ہے اور جوں جوں فشارہ اوپر اُٹھتا جاتا ہے قابلہ کی ہوا کھلندن ب میں سے داخل ہوکر فشارہ کے نیچے کی جگہ کو بھرتی رہتی ہے۔

نیز اس عمل کے اثنا میں د کے اوپر کی ہوا کثیف ہوتی جاتی ہے جسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ ج پر کا کھلندن اوپر کو کھل جاتا ہے اور ہوا نکل کر کرۂ ہوائی میں داخل ہو جاتی ہے۔

ج پر پہنچکر فشارہ نیچے اترنا شروع کرتا ہے، اسطرح سے اسکے اور ب کے درمیان

جو ہوا ہے وہ فشارہ کے دباؤ کے زیر عمل کثیف ہوتی جاتی ہے جسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ کھلندن ب تو بند ہوجاتا ہے لیکن کھلندن د کھل جاتا ہے اور ہوا اس میں سے نکل کر فشارہ کے اوپر کی جگہ میں بھر جاتی ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ ایک مکمل ضرب سے ب کے نیچے کی ہوا کی کچھ مقدار خارج ہوجاتی ہے۔

بعد کی ہر ایک ضرب سے ہوا کا یہی حجم (لیکن بتدریج کم ہونے والے دباؤ پر) خارج ہوتا رہتا ہے حتےٰ کہ بالآخر ظرف کے اندر کی باقیماندہ ہوا کا دباؤ کھلندنوں کو اُٹھانے کے لئے کافی نہیں ہوتا۔

نیچے کی جانب فشارہ کی حرکت کے دوران میں ج پر کا کھلندن بند ہوجاتا ہے اور فشارہ کے اوپر کی ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کی نسبت بہت کم ہوتا ہے، اس لئے کھلندن ج کا فائدہ یہ ہے کہ فشارہ کا کھلندن نسبتاً زیادہ آسانی سے اوپر اُٹھ سکتا ہے ۔ علاوہ ازایں اوپر کی طرف فشارہ کو حرکت دینے میں جو کام کرنا پڑتا ہے کھلندن ج کی وجہ سے اس میں بہت تخفیف ہوجاتی ہے۔

۱۳۸- ہوا کے اخراج کی شرح۔ فرض کرو کہ قابلہ (جسمیں وہ نلی بھی شامل ہے جو قابلہ کو اسطوانہ کے ساتھ وصل کرتی ہے) کا حجم ح ہے اور اسطوانہ کا حجم اوپر اور

نیچے کے کھلنے والوں کے درمیان حَ ہے۔ نیز فرض کرو کہ قابلہ کے اندر کی ہوا کی ابتدائی کثافت ک ہے اور پہلی نصف ضرب کے بعد کثافت ک_1 ہے، پس ظاہر ہے کہ جس ہوا کی کثافت ابتدا میں ک تھی اور حجم ح اب اسکی کثافت ک_1 ہے اور حجم (ح + حَ) ہے۔

لہذا بائل کے کلیہ کی رُو سے $\text{ک} \times \text{ح} = \text{ک}_1 (\text{ح} + \text{حَ})$

اسلئے $\text{ک}_1 = \frac{\text{ح}}{\text{ح} + \text{حَ}} \times \text{ک}$ ... (۱)

جب نشارہ پھر ب تک اتر آتا ہے تو ہوا کا حجم حَ خارج ہوجاتا ہے اور قابلہ کے اندر جو ہوا رہ جاتی ہے اس کا حجم ح ہوتا ہے اور کثافت ک_1۔

یہی عمل ایک دفعہ اور کیا جاتا ہے اس لئے اگر دوسری پوری ضرب کے بعد قابلہ کے اندر کی ہوا کی کثافت ک_2 ہو تو صریحاً $\text{ک}_2 = \frac{\text{ح}}{\text{ح} + \text{حَ}} \times \text{ک}_1 = \left(\frac{\text{ح}}{\text{ح} + \text{حَ}}\right)^2 \text{ک}$

اسی طرح سے تیسری مکمل ضرب کے آخر میں کثافت $\left(\frac{\text{ح}}{\text{ح} + \text{حَ}}\right)^3 \text{ک}$ ہوگی اور ن ویں ضرب کے آخر میں کثافت $\left(\frac{\text{ح}}{\text{ح} + \text{حَ}}\right)^{\text{ن}} \text{ک}$ ہوگی۔ اس جملہ کی رُو سے کثافت صفر کبھی نہیں ہوسکتی، پس نظری طریق پر بھی مکمل خلا کا پیدا کرنا ناممکن ہے۔

ایک خاصے عمدہ ہوا پمپ کے ذریعہ ہوا خارج کرنے سے قابلہ کے اندر کی ہوا کا دباؤ انتہائی صورت میں پارہ کے $\frac{1}{10}$ انچ دباؤ سے کم نہیں ہوسکتا، ہوا پمپ کے ذریعہ جو قلیل ترین دباؤ حاصل کیا جاچکا ہے وہ شاید مندرجہ بالا دباؤ کا ایک

چوتھائی ہے۔

مشق ۱۔ اگر ہوا پمپ کا قابلہ اس کے نل کا ۶ گنا ہو تو بتاؤ کہ کم از کم کتنی ضربوں سے اندر کی ہوا کی کثافت ابتدائی کثافت کے نصف سے کم ہو جائے گی۔

اس میں $\frac{ح}{ح + ح} = \frac{۶}{۱+۶} = \frac{۶}{۷}$

$\therefore ک_۱ = \frac{۶}{۷} ک، \quad ک_۲ = \left(\frac{۶}{۷}\right)^۲ ک = \frac{۳۶}{۴۹} ک، \quad ک_۳ = \left(\frac{۶}{۷}\right)^۳ ک$
$= \frac{۲۱۶}{۳۴۳} ک، \quad ک_۴ = \left(\frac{۶}{۷}\right)^۴ ک = \frac{۱۲۹۶}{۲۴۰۱} ک، \quad \left(\frac{۶}{۷}\right)^۵ ک = \frac{۷۷۷۶}{۱۶۸۰۷} ک$

$\therefore ک_۴ > \frac{۱}{۲} ک$ اور $ک_۵ < \frac{۱}{۲} ک$

پس پانچ ضربیں لگانا کافی ہوگا۔

۱۳۹۔ دو نلا یا ہاکس بی کا ہوا پمپ۔ اس آلہ میں دو نل ہوتے ہیں، ان میں سے ہر ایک سمیٹن پمپ کے نل کے متشابہ ہوتا ہے اور ہر ایک میں ایک ایک فشارہ ہوتا ہے۔

اِن دونوں فشاروں کو ایک ساتھ ایک دندانہ دار چرخ ع کے ذریعہ چلایا جاتا ہے جس کے دندانے فشاروں کی سلاخوں کے دندانوں میں پھنسے رہتے ہیں،

اس چرخ کو دستہ ف ف کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے۔

جب ایک فشارہ نیچے اترتا ہے تو دوسرا اوپر چڑھتا ہے شکل میں بائیں جانب کا فشارہ نیچے اُتر رہا ہے اور دائیں جانب کا اوپر چڑھ رہا ہے۔

اس ساخت کے آلہ کا ایک فائدہ یہ ہے کہ ہوا کا دباؤ جو ایک طرف تو ایک فشارہ کی راسی حرکت میں مزاحمت پیدا کرتا ہے دوسری طرف دوسرے فشارہ کو نیچے اتارنے میں مدد دیتا ہے۔

اس پمپ کے ذریعہ ہوا کے اخراج کی شرح کو اسی طرح محسوب کیا جاسکتا ہے جس طرح سیٹن کے پمپ میں کیا گیا تھا۔ اس صورت میں ہر ایک نل کا حجم ح ہے اور ن ہر ایک فشارہ کی ضربوں کی تعداد کے نصف کو ظاہر کرتا ہے یعنی یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایک فشارہ اپنے اسطوانہ میں کتنی دفعہ پھرا جبکہ اوپر کی طرف اور نیچے کی طرف دونوں سمتوں میں اس کی دونوں حرکتوں کو شمار کیا جائے،

ہاکس بی کے ہوا پمپ میں بھی ابتداً، ایک نل تھا، اس وقت یہ سمیٹن پمپ کے متشابہ تھا فرق صرف اس قدر تھا کہ اس میں اسطوانہ کی چوٹی کھلی تھی۔

۱۴۔ سیمابی داب پیما۔ پارہ کا داب پیما ایک آلہ ہوتا ہے جس سے قابلہ کے اندر کی ہوا کا دباؤ دریافت کرسکتے ہیں، یہ دو قسم کا ہوتا ہے، پہلی قسم کے داب پیما کی شکل ایک چھوٹے سیفنی بارپیما کی سی ہوتی ہے جس میں ایک چھوٹی خمدار نلی ہوتی ہے، نلی کی ساقیں تقریباً مساوی طول کی ہوتی ہیں،

ایک شاخ کے اندر پارہ کے اوپر ل پر خلا ہوتا ہے، لیکن دوسری ساق کا سرا ج قابلہ کے اندر کی ہوا میں کھلا ہوتا ہے، جیسے جیسے قابلہ کے اندر کی ہوا کا دباؤ کم ہوتا جاتا ہے خلا والی نلی کے اندر پارہ کی سطح نیچی ہوتی جاتی ہے اور دونوں نلیوں کے اندر پارہ کے ارتفاعوں میں جو فرق ہوتا ہے وہ قابلہ کے اندر کی ہوا کے دباؤ کا ناپ ہوتا ہے۔

دوسری قسم کے داب پیما میں بارپیما کی ایک سیدھی نلی ہوتی ہے، اس نلی کے اوپر کا سرا قابلہ کی ہوا سے ملحق ہوتا ہے اور نچلا سرا پارہ کے ایک برتن کے اندر ڈوبا ہوتا ہے جو کرۂ ہوائی میں رکھا ہوتا ہے، جوں جوں قابلہ کی ہوا کا دباؤ کم ہوتا جاتا ہے، کرۂ ہوائی کے دباؤ کی وجہ سے پارہ نلی کے اندر اوپر چڑھتا جاتا ہے اور نلی کے اندر پارہ کا ارتفاع اس فرق کو ظاہر کرتا ہے جو کرۂ ہوائی کے دباؤ اور قابلہ کے اندر کی ہوا کے دباؤ میں ہو۔

۱۴۱۔ ایک سمیٹن کے ہوا پمپ میں فشارہ کی سعت کا طول ف ہے، نل کی چوٹی سے فشارہ کے بالاترین محل کا فاصلہ ل ہے اور نل کے پیندے سے فشارہ کے سب سے نچلے محل کے فاصلہ ب ہے اگر کرۂ ہوائی کی کثافت ک ہو تو بتاؤ کہ قابلہ کے اندر کی ہوا کی انتہائی کثافت $\frac{\text{ل ب}}{(\text{ف}+\text{ل})(\text{ف}+\text{ب})}$ ک ہے۔

فرض کرو کہ جب کسی ضرب کے شروع میں فشارہ د اپنے سب سے نچلے مقام پر ہوتا ہے تو اس کے اور ب کے درمیان کی ہوا کی کثافت ک_1 ہوتی ہے، ظاہر ہے کہ اس وقت فشارہ اور ج کے درمیان کی ہوا کی کثافت بھی ک_1 ہوگی، ملاحظہ ہو شکل دفعہ ۱۲۷۔ نیز فرض کرو کہ قابلہ کی ہوا کی کثافت ک_2 ہے۔

اب اگر ہم کثافت ک_2 میں مزید تخفیف کرنا چاہیں تو ضرور ہے کہ جب ضرب مابعد میں فشارہ ج اوپر کی طرف اُٹھایا جائے تو کھلندن ب اوپر کی طرف کھل سکے۔

جب فشارہ اپنے بالاترین محل میں پہنچیگا تو کثافت ک_1 والی وہ ہوا جو ف + ا طول کو گھیرے ہوئے تھی اسکی کثافت $\frac{\text{ف}+\text{ا}}{\text{ا}}\text{ک}_1$ ہوجاتی ہے اور وہ طول ا کو گھیرتی ہے پس اوپر کا کھلندن کھل سکیگا اگر

$$\frac{\text{ف}+\text{ا}}{\text{ا}}\text{ک}_1 > \text{ک} \quad . . . . (۱)$$

نیز اس ضرب سے کثافت ک_2 والی ہوا جو طول ب کو گھیرے ہوئے تھی وہ اب پھیل جاتی ہے اور کثافت $\frac{\text{ب}\,\text{ک}_1}{\text{ف}+\text{ب}}$ پر طول ف + ب کو گھیرتی ہے، پس نیچے کا کھلندن اوپر اُٹھیگا اگر

$$\text{ک}_2 > \frac{\text{ب}\,\text{ک}_1}{\text{ف}+\text{ب}} \quad . . . . (۲)$$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ک}_2 > \frac{\text{ب}}{\text{ف}+\text{ب}} \times \frac{\text{ا}\,\text{ک}}{\text{ف}+\text{ا}} > \frac{\text{ا}\,\text{ب}}{(\text{ف}+\text{ا})(\text{ف}+\text{ب})}\text{ک}$$

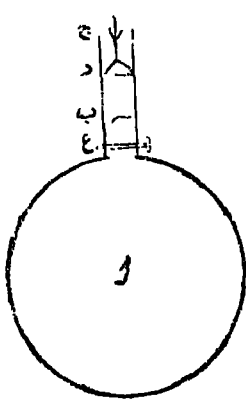
پس قابلہ کی ہوا کی کثافت $\frac{\text{ا}\,\text{ب}}{(\text{ف}+\text{ا})(\text{ف}+\text{ب})}\text{ک}$ سے بھی کم نہیں ہوسکتی، جب کثافت اس مقدار تک پہنچ جائیگی تو پمپ کا عمل بعدہ بے سود رہیگا۔

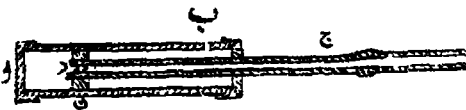
اس سے یہ بھی ظاہر ہے کہ کیوں ہر ایک ضرب کے آخر میں فشارہ کو اپنے انتہائی مقام تک لے جانا ضروری ہوتا ہے۔ یہ امر خاص کر اُس صورت میں بہت ضروری ہے جب قابلہ کی ہوا کی کثافت اپنی انتہائی قیمت کے قریب آ پہنچے۔

نل کا طول د یا ب جو فشارہ کی مار سے محفوظ رہتا ہے خُلوت کہلاتا ہے۔

اس تحقیقات میں کھلمندنوں کے اوزان کو احاطۂ حساب میں نہیں لایا گیا۔

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ ہاکس بی کے ہوا پمپ میں ہوا کی انتہائی کثافت $\frac{ب}{ف+ب}$ ک ہوتی ہے جہاں ف فشارہ کی ضرب کا طول ہے اور ب نل کے پیندے سے فشارہ کے سب سے نچلے محل کا فاصلہ ہے۔

۱۴۲۔ مکثف ہوا پمپ۔ یہ آلہ اپنے مقصد کے لحاظ سے ہوا پمپ کا عین متضاد یا الُٹ ہے یعنی اس کی مدد سے کسی ظرف کی ہوا کے دباؤ کو کم کرنے کی بجائے زیادہ کرتے ہیں۔

یہ مکثفہ ایک ظرف و پر مشتمل ہوتا ہے اس ظرف کے ساتھ ایک اسطوانہ ج ب لگا ہوتا ہے جس کے اندر ایک فشارہ د چلتا ہے، اس فشارہ کے اندر اور نیز اس کے اور ظرف و کے درمیان ایک ایک کھلمندن ہوتا ہے، یہ دونوں کھلمندن نیچے کی طرف کھلتے ہیں۔

جب فشارہ د کو نیچے دھکیلا جاتا ہے تو اس کے اور ب
کے درمیان کی ہوا کثیف ہوجاتی ہے جس کی وجہ سے کھلندن
ب کھُل جاتا ہے اور ہوا ظرف و کے اندر داخل ہوجاتی ہے۔
جب فشارہ ب پر پہنچ جاتا ہے تو اس کی بازگشت شروع
ہوتی ہے اس حرکت کے اثنا میں ظرف و کے اندر کی ہوا کا دباؤ
کھلندن ب کو بند کردیتا ہے لیکن کرۂ ہوائی کا دباؤ کھلندن د کو
کھول دیتا ہے اور ہوا د اور ب کی درمیانی جگہ میں بھر جاتی
ہے حتےٰ کہ فشارہ پھر اپنے بالاترین مقام ج پر پہنچ جاتا ہے۔
اب جو فشارہ کو اندر دھکیلا جاتا ہے تو د اور ب کی درمیانی
ہوا ظرف کے اندر داخل ہوجاتی ہے۔
ظرف میں ایک روک ڈاٹ ع لگی ہوتی ہے جس کی مدد سے
جب چاہیں ظرف کو بند کرسکتے ہیں۔

سیکلوں کے اندر
ہوا بھرنے کے لئے
جس قسم کے پمپ کو
استعمال کرتے ہیں وہ بھی ایک مکثفہ ہوتا ہے جو ساخت میں ذرا
مختلف ہوتا ہے۔

اِس میں فشارہ کی سلاخ د ج اندر سے کھوکھلی ہوتی ہے اسکا ایک
سرا ج بائیسکل کی ربڑ کے منہ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے اور دوسرے
سرے د پر ایک کھلندن ہوتا ہے جو کھوکھلی سلاخ کے اندر
کی طرف کھُلتا ہے۔ جب فشارہ بیرونی نل و ب کے ایک سرے

ب پر ہوتا ہے تو باہر کی ہوا ب پر کے سوراخ میں سے
نل کے اندر داخل ہوجاتی ہے پھر نل کو آگے دھکیلا جاتا ہے
اور جب فشارہ ب سے آگے نکل چلتا ہے تو ا اور د کی
درمیانی ہوا کا تعلق باہر کی ہوا سے منقطع ہوجاتا ہے بعد ازاین
یہ ہوا کثیف ہوکر کھلمندن د کو کھول لیتی ہے اور سائیکل کے
کھلمندن میں سے ربڑ کے اندر داخل ہوجاتی ہے۔

اکثر اوقات ب پر کا سوراخ نہیں ہوتا بلکہ فشارہ کے سرے
د پر چمڑے کا ایک گول ٹکڑا ہوتا ہے جو دفعہ ۱۴۶ کے ٹکڑے
کے مشابہ ہوتا ہے۔ یہ ٹکڑا نل میں عین چسپس کر آتا ہے جب نل کو
پیچھے کھینچا جاتا ہے تو یہ چمڑا ہوا کو اندر داخل ہونے دیتا ہے
لیکن جب نل کو آگے دھکیلا جاتا ہے تو یہ اندر کی ہوا کو باہر
نکلنے نہیں دیتا۔ باہر کی ہوا کے ساتھ تعلق ب پر کے ایک
چھوٹے سوراخ کے ذریعہ قائم رکھا جاتا ہے۔

۱۴۴۔ مکثف کے اندر کی ہوا کی کثافت۔ فرض کرو کہ ظرف
ا کا حجم مع اس کے اسطوانہ کے اس حصہ کے جو ب سے
نیچے ہے ح ہے اور اسطوانہ کے اس حصہ کا حجم جو فشارہ
کی سمت یا مسافت کے بالاترین نقطہ اور ب کے درمیان
ہے حَ ہے۔

پس فشارہ کی ہر ضرب سے کرۂ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کا حَ
حجم ظرف کے اندر داخل ہوتا ہے اس لئے ن ضربوں کے بعد
مکثف کے اندر جو ہوا ہوگی اس کا حجم کرۂ ہوائی کے دباؤ پر

$\text{ح} + \text{ن}\ \text{حَ}$ ہوگا۔

اگر اندر کی ہوا کی ابتدائی کثافت ک ہو اور ن ضربوں کے بعد کثافت $\text{ک}_\text{ن}$ ہو تو $\text{ک}\,(\text{ح} + \text{ن}\ \text{حَ}) = \text{ک}_\text{ن} \times \text{ح}$

$$\therefore\ \text{ک}_\text{ن} = \frac{\text{ح} + \text{ن}\ \text{حَ}}{\text{ح}}\ \text{ک}$$

مشق۔ سمیٹن کے ہوا پمپ اور ایک مکثفہ کا قابلہ مشترک ہے۔ ان دونوں کے نل برابر ہیں اور ہر ایک نل قابلہ کے $\frac{1}{10}$ حجم کے مساوی ہے۔ اگر مکثفہ کی ۸ ضربیں لگائی جائیں اور بعد میں ہوا پمپ کی ۶ ضربیں لگائی جائیں تو ثابت کرو کہ اندر کی ہوا کی کثافت تقریباً وہی رہیگی۔

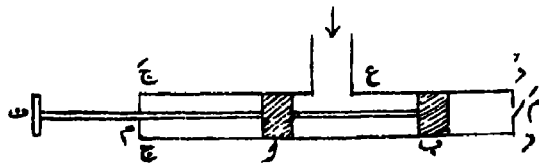
اگر ابتدائی کثافت ک ہو تو مکثفہ کی ۸ ضربوں کے بعد کثافت $= \frac{\text{ح} + 8 \times \frac{1}{10}\text{ح}}{\text{ح}}\ \text{ک}$

$= \frac{18}{10}\ \text{ک}$

نیز پمپ کی ۶ ضربوں کے بعد کثافت $= \frac{18}{10}\text{ک} \times \left(\frac{\text{ح}}{\text{ح} + \frac{1}{10}\text{ح}}\right)^6 = \frac{18}{10}\text{ک}\left(\frac{10}{11}\right)^6$

$= \frac{1800000}{1771561} = 1.016\ \text{ک}$

پس آخری کثافت ابتدائی کثافت کے تقریباً مساوی ہے۔

۱۴۴۔ ٹیسٹ کا ہوا پمپ۔ عام طور پر اس طرح کا پمپ زیادہ استعمال میں آتا ہے۔ اس میں دو فشارے ا اور ب ہوتے ہیں جن کو ایک سلاخ کے ذریعہ دستہ ت سے وصل

کیا ہوتا ہے۔ ان فشاروں کے بعید ترین رخوں کا درمیانی فاصلہ

اسطوانہ ج د کے نصف طول سے قدرے کم ہوتا ہے، اسطوانہ کے وسط میں ایک راستہ ع ہوتا ہے جو دوسری جانب قابلہ میں کھلتا ہے جس کی ہوا نکالنا منظور ہوتا ہے، جب فشارہ ب، دپر ہوتا ہے تو ا، ع کے عین دائیں جانب پہنچ جاتا ہے کیونکہ ا اور ب کے بعید ترین رخوں کا فاصلہ ½ ج د سے کچھ کم ہے، م اور مَ پر دو کھلندن ہوتے ہیں جو دونوں باہر کی طرف کھلتے ہیں۔

شکل بالا میں فشارہ ب، دَ کی جانب حرکت کر رہا ہے اور ہوا کو مَ میں سے باہر نکال رہا ہے، جب بَ دَ پر اور بنابریں ا راستہ ع کے دائیں جانب آجاتا ہے تو قابلہ کی ہوا کا تعلق ا اور ج کی درمیانی جگہ کے ساتھ قائم ہوجاتا ہے، فشارہ کی بازگشت کے دوران میں ا اور ج کی درمیانی ہوا دب کر براستہ کھلندن م خارج ہوتی جاتی ہے اور جب بالآخر ا، ج پر اور بنابریں ب راستہ ع کے بائیں جانب پہنچ جاتا ہے تو قابلہ کی ہوا پھیل کر براستہ ع، ب اور د کی درمیانی جگہ کو بھر دیتی ہے یہ ہوا فشارہ کو اندر یعنی دائیں جانب دھکیلتے وقت کھلندن مَ میں سے خارج ہوجاتی ہے۔ فشارہ کو اسی طرح آگے پیچھے چلانے سے قابلہ کی ہوا خارج ہوتی رہتی ہے۔

سمیٹن کے ہوا پمپ میں دو کھلندن ہوتے ہیں، ایک قابلہ کے اندر اور دوسرا فشارہ میں جو ظرف کی ہوا کے خاص حد تک لطیف ہوجانے کے بعد اوپر اٹھ نہیں سکتے۔

لیکن اس پمپ میں ان دونوں کھلمندنوں کی ضرورت نہیں ہے
اس طرح سے اس پمپ کے ذریعہ ہوا کا اخراج زیادہ حد تک
ممکن ہے، اس لحاظ سے اس پمپ کو سمیٹن کے ہوا پمپ پر
فوقیت حاصل ہے۔

۱۴۵۔ جب ہوا کا اخراج بہت بڑی حد تک درکار ہوتا ہے
جیسا برقی چراغوں کے گولوں میں تو مندرجۂ بالا ساخت کے ہوا
پمپ کام نہیں دیتے کیونکہ ان میں ایک خاص حد پر پہنچکر کھلمندن کھل
نہیں سکتے اور اس لئے ہوا کی کثافت میں مزید کمی واقع نہیں ہوسکتی،
پس لامحالہ کسی اور قسم کا پمپ استعمال کرنا پڑتا ہے، اسپرنگل کا
ہوا پمپ اس غرض کو پورا کرتا ہے۔ اس آلہ میں شیشے کی ایک
انتصابی نلی ا ب ج ہوتی ہے جس کا نچلا سرا پارہ کے ایک
برتن گ کے اندر ڈوبا ہوتا ہے اور اوپر کے سرے پر بھی
پارہ کا ایک برتن ع لگا ہوتا ہے۔

اس نلی کو ب پر ایک شیشے کی نلی کے ذریعہ
قابلہ کے ساتھ وصل کیا ہوتا ہے جس کی ہوا خارج
کرنا مقصود ہوتا ہے۔ طول ب گ پارہ کے
بارپیما کے ارتفاع سے زیادہ ہوتا ہے۔

ظرف ع کا پارہ نلی ا ب ج میں سے
نیچے گرایا جاتا ہے نقطہ ب سے گزرنیکے بعد
یہ چھوٹے قطروں میں تقسیم ہوجاتا ہے
جن کی درمیانی جگہ میں قابلہ کی ہوا ہوتی ہے جو براستہ د ب

آتی ہے، پارہ کی دھار اس ہوا کو ظرف گ کے اندر لیجاتی ہے جہاں سے وہ کرہ ہوائی میں مل جاتی ہے۔

اس عمل سے ب د کی ہوا کا دباؤ کم ہوتا جاتا ہے حتّےٰ کہ بالآخر پارہ کے گرتے ہوئے قطروں کی چھن چھن کی آواز سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ان کے ساتھ ہوا نہیں آرہی ہے، اس وقت نلی ب گ میں پارہ کا ارتفاع پارہ کے بارپیما کے ارتفاع کے تقریباً مساوی ہوتا ہے۔

اس بات کی احتیاط رکھنی چاہیئے کہ ظرف ع خالی نہ ہونے پائے، ظرف گ کے بھر جانے کے بعد جو پارہ اس میں سے دوسرے برتن کے اندر گرتا رہتا ہے اس کو بار بار ظرف ع میں ڈالتے رہتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۷

۱۔ سمیٹن کے ہوا پمپ کے قابلہ اور نل کی باہمی نسبت دریافت کرو جبکہ چوتھی ضرب کے آخر میں قابلہ کی ہوا کی کثافت اور ابتدائی کثافت میں نسبت ۸۱ : ۲۵۶ ہو۔

۲۔ ایک یک نلے ہوا پمپ کے نل کی تراش کا رقبہ ایک مربع انچ ہے اور اسکے فشارہ کی ضرب کا طول ۴ انچ ہے، اگر اس کے قابلہ کی گنجائش ۳۶ مکعب انچ ہو تو ۸ مکمل ضربوں کے بعد نل کے اندر کی ہوا کا جو دباؤ ہے اس کا مقابلہ ابتدائی دباؤ کے ساتھ کرو۔

۳۔ ایک ہوا پمپ کے نل اور قابلہ کے حجموں کی نسبت ۱ : ۱۰ ہے نیز

ایک اور ہوا پمپ میں یہی نسبت ۱ : ۵ ہے۔ ثابت کرو کہ فشاروں کی تین صعودی حرکتوں کے بعد دونوں قابلوں کی ہوا کی جو کثافتیں ہونگی ان کی نسبت ۱۷۲۸ : ۱۳۳۱ ہوگی۔

۴۔ ایک دو نلے ہوا پمپ کے ہر ایک نل کا حجم قابلہ کے حجم کا $\frac{1}{4}$ ہے بتاؤ کہ پمپ کے دستہ کی چار مکمل ضربوں کے بعد قابلہ کی ہوا کے دباؤ میں کیا کمی واقع ہوگی۔

۵۔ ایک ہوا پمپ کا قابلہ اس کے نل کا ۶ گنا ہے، بتاؤ کہ کتنی ضربوں کے بعد اندر کی ہوا کی کثافت ابتدائی کثافت کے (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ سے کم ہوگی۔

۶۔ ایک ہوا پمپ کے نل اور قابلہ کے حجموں کی نسبت $\frac{1}{12}$ ہے اور ایک دوسرے ہوا پمپ میں یہی نسبت $\frac{1}{4}$ ہے، بتاؤ کہ دوسرے پمپ کی کتنی ضربیں تخلیہ ہوا کا وہی درجہ پیدا کریگی جو پہلے پمپ کی چھ ضربیں کرتی ہیں۔

۷۔ ایک قابلہ کی ہوا خارج کرنے کے دوران میں پمپ کی ۱۰ ضربوں کے بعد اُس سیفن گیج (داب پیما) کا پارہ جو پمپ کے قابلہ کے ساتھ ملحق ہے ۲۰ انچ پر ہے جبکہ بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے، بتاؤ کہ ۲۰ مزید ضربوں کے بعد داب پیما کا پارہ کس ارتفاع پر ہوگا۔

۸۔ ایک ہوا پمپ کے فشارہ کی ایک مکمل ضرب کا طول ۱۲ انچ ہے فشارہ کے بالاترین محل کا فاصلہ نل کی چوٹی سے اور نیز اس کے سب سے نچلے محل کا فاصلہ نل کے پیندے سے $\frac{1}{4}$ انچ ہے، ثابت کرو کہ قابلہ کی ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کے $\frac{1}{625}$ ویں حصہ سے کم نہیں ہوسکتا۔

۹۔ ایک کثیف ہوا پمپ کے نل کی گنجائش ۸۰ مکعب سنتی میتر ہے اور اسکے قابلہ کی ۱۰۰۰ مکعب سنتی میتر، اگر قابلہ کی ہوا کا دباؤ ابتدأً ایک کرۂ ہوائی کے

برابر ہو تو بتاؤ کہ ۴ ہوائی کروں کا دباؤ پیدا کرنے کے لئے کتنی ضربوں کی ضرورت ہوگی۔

۱۰۔ ایک مکثف ہوا پمپ کے نل کا قطر ایک انچ ہے اور طول ۸ انچ، اس کے ذریعہ ایک سیکل کی ربڑ کے اندر ہوا بھرنا مقصود ہے جسکا قطر اور طول ہوا بھرنے کے بعد بالترتیب ایک انچ اور ۸۰ انچ ہیں، اگر ابتداً ربڑ بالکل خالی ہو تو بتاؤ کہ ربڑ میں دو ہوائی کروں کا دباؤ پیدا کرنے کے لئے کتنی ضربوں کی ضرورت ہوگی۔

۱۱۔ ایک مکثفہ کے فشارہ کا رقبہ ۵ مربع انچ ہے اور اس کے قابلہ کا حجم فشارہ کی سعت کے حجم کا ۱۰ گنا ہے، فشارہ کو حرکت دینے کیلئے جو قوت لگائی جاتی ہے اس کی مقدار ۱۲۵ پونڈ وزن سے تجاوز نہیں کر سکتی، بتاؤ کہ اس قوت کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ کتنی مکمل ضربیں لگائی جا سکتی ہیں جبکہ کرۂ ہوائی کا دباؤ فی مربع انچ ۱۵ پونڈ وزن کے مساوی ہو۔

۱۲۔ ایک مکثفہ کے اسطوانہ کا کُل حجم ب ہے لیکن اس کے حجم کا وہ حصہ جس میں فشارہ پھر سکتا ہے صرف ج ہے، ثابت کرو کہ قابلہ کی ہوا کا دباؤ $\frac{ب}{ب-ج}$ کروں سے تجاوز نہیں کر سکتا۔

۱۳۔ ایک سمیٹن کے ہوا پمپ کا قابلہ اس کے نل کا ۸ گنا ہے، بتاؤ کہ اوپر کا کھلمندن کھلنے سے قبل فشارہ پانچویں صعودی ضرب میں ضرب مذکور کی کونسی کسر طے کر لیتا ہے۔

۱۴۔ ایک سمیٹن کے ہوا پمپ میں اوپر کا کھلمندن اسوقت کھلتا ہے جب فشارہ اپنے راستہ کا تین چوتھائی طے کر چکتا ہے، ضرب کی ابتدا میں قابلہ کی ہوا کی کثافت معلوم کرو۔

۱۵- ایک بوتلنے کی نلی جسکی تراش کا رقبہ ایک مربع انچ ہے مسدود ہوگئی ہے، ایک مکثف ہوا پمپ نلی کے ساتھ لگا کر دیکھا گیا ہے کہ ۴۰ ضربوں کے بعد نلی کے اندر ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کا ۴ گنا ہے، اگر پمپ کے نل کی گنجائش ۵۰ مکعب انچ ہو تو ثابت کرو کہ رکاوٹ نلی کے منہ سے ۴۱ ¼ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔

۱۶- ایک مکثفہ اور سمیٹن کے ہوا پمپ کے نل برابر ہیں اور قابلہ مشترک ہے، قابلہ کا حجم ہر ایک نل کے حجم کا ۲۰ گنا ہے، اگر مکثفہ کی ۲۰ ضربیں لگائی جائیں اور بعد ازایں پمپ کی ۱۴ تو ثابت کرو کہ قابلہ کی ہوا کی کثافت تقریباً وہی ہوگی جو ابتدا میں تھی۔

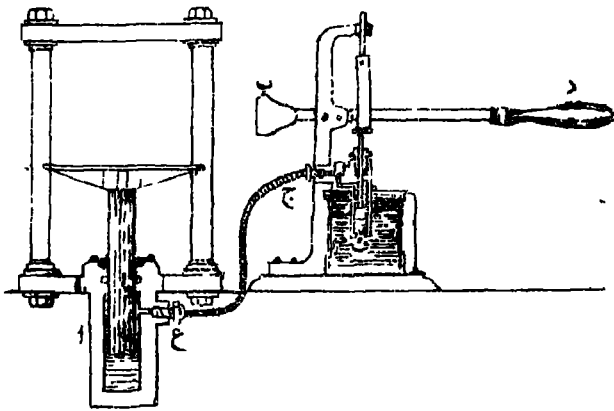
۱۷- ہوا کو حجم ا کے ایک ظرف میں سے نکالکر ایک مکثفہ کے ذریعہ اَ حجم کے ایک ظرف میں بھرا گیا ہے، مکثفہ کے نل کا حجم ب ہے اور اسکے دونوں جانب وہ حجم جن میں فشارہ نہیں پھرتا بالترتیب ج اور جَ ہیں، اگر کھلندنوں کے اوزان کو نظر انداز کیا جائے تو ثابت کرو کہ ظروف ا اور اَ کے دباؤں کی انتہائی نسبت

$$\frac{ج\ جَ}{(ب - ج)\ (ب - جَ)}$$ ہوگی۔

۱۸- ایک مکثفہ کے نل کا حجم ح ہے اور نل کے اُس حصہ کا حجم جو نل کے پیندے اور فشارہ کے سب سے نچلے محل کے درمیان ہے حَ ہے، اگر کھلندن اس وقت کھلیں جبکہ اس کے دونوں جانب کے دباؤں کا فرق د ہو تو بتاؤ کہ قابلہ میں جو زیادہ سے زیادہ دباؤ پیدا کیا جا سکتا ہے وہ $(\text{ہ} - \text{د})\frac{ح}{حَ} - \text{د}$ ہے جہاں ہ کرۂ ہوائی کا دباؤ ہے۔

۱۹- ایک ہاکس بی کے پمپ کے قابلہ کا حجم ل ہے اور نل کا ب، اگر نل کے نچلے حصے کا وہ حجم جس میں فشارہ نہ پہنچ سکے ج ہو تو ثابت کرو کہ ن ضربوں کے بعد کثافت کرۂ ہوائی کی کثافت کی

$$\frac{ج}{ب} + \left(1 - \frac{ج}{ب}\right)\left(\frac{ل}{ل+ب}\right)^{ن}$$ گنی ہوگی۔

۱۴۶- براما کا شکنجہ- اس مشین کا تذکرہ پیش ازیں دفعہ ۱۲ میں ہوچکا ہے، اس کی مدد سے بہت بڑا دباؤ ڈالا جاسکتا ہے، اسکی ساخت کے ضروری حصے وہاں دکھائے جاچکے ہیں، جو مشین درحقیقت استعمال کی جاتی ہے اس کی انتصابی تراش ذیل کی شکل میں دکھائی گئی ہے، ایک چھوٹے ٹھوس موسل کو بیرم ب د کے

ذریعہ چلایا جاتا ہے جب یہ موسل اوپر کو اٹھتا ہے تو کھلمندن ع بھی اوپر اٹھ آتا ہے اور اس کے نیچے کے حوض میں سے مائع اوپر چڑھ جاتا ہے، جب موسل کو نیچے دبایا جاتا ہے تو

ف پر کا کھلندن بند ہوجاتا ہے اور مائع ج ع کے ایک کھلندن میں سے گزر کر ل کے اندر داخل ہوجاتا ہے۔

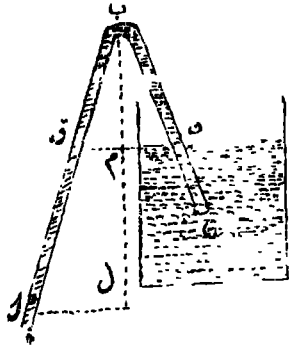
جب یہ مشین ایجاد کی گئی تھی تو اس کو پورے طور پر آب بند بنانے کے لئے بڑی دشواری واقع ہوئی جن اسطوانوں کے اندر فشاروں کی سلاخیں پھرتی ہیں ان کی درزوں میں سے پانی پچک کر باہر نکل جاتا تھا۔

بالآخر یہ مشکل چمڑے کے ایک کالر یا گلوپوش کے ذریعہ حل کی گئی۔ اس کی شکل ساتھ میں دکھائی گئی ہے

اس کالر کو آب بند بنانے کے لئے پہلے تیل سے بھگو لیا جاتا ہے اور پھر اس کے قصر کو نیچے کیطرف کرکے درز کے منہ پر پہنا دیا جاتا ہے جب پانی فشارہ اور درز کے پہلوؤں کے بیچ میں سے نکلنے کی کوشش کرتا ہے تو اس کے دباؤ کی وجہ سے کالر مضبوطی سے فشارہ کے پہلو کے ساتھ چمٹ جاتا ہے جتنا یہ دباؤ زیادہ ہوتا ہے اتنے ہی زیادہ زور سے یہ فشارہ کے پہلو کے ساتھ چمٹتا ہے، اس طرح پانی کا اپنا ہی دباؤ اس کو باہر نکلنے سے روکے رکھتا ہے۔

۷۴ سیفن ایک آلہ ہوتا ہے جس کی وجہ سے ہم مائع سے بھرے ہوئے ظرفوں کو خالی کرسکتے ہیں۔ اس میں صرف ایک خمدار نلی ا ب ج ہوتی ہے جس کی ایک شاخ ا ب دوسری شاخ ب ج کی نسبت لمبی ہوتی ہے۔

سیفن کو مائع سے بھرا جاتا ہے پھر اس کے دونوں سروں ا اور ج کو

بند کر کے آلہ کو اُلٹا دیا جاتا ہے اس کے بعد چھوٹے سرے ج کو ظرف کے مائع کی سطح کے نیچے رکھکر دونوں سروں کو کھول دیاجاتا ہے یہ خیال رکھا جائے کہ سرا ا ظرف کے مائع کی سطح سے ہمیشہ نیچا رہے۔ اب مائع ا میں سے بہنا شروع ہوتا ہے اور جب تک کہ سرا ج مائع کی سطح سے نیچے رہتا ہے یہ مائع بہتا رہتا ہے۔

آلہ مذکور کے عمل کی تشریح - فرض کرو کہ سیفن کا بالاترین نقطہ ب ہے ب میں سے ایک انتصابی خط کھینچو جو ظرف کے پانی کی ہمواری سے م پر اور ا میں سے گزرنے والے افقی خط سے ل پر ملے نیز فرض کرو کہ ن میں سے گذرنے والی افقی سطح مستوی شاخ ب ا سے ق پر ملتی ہے۔

اب اُن قوتوں پر غور کرو جو حرکت شروع ہونے سے عین پہلے سیفن کے مائع پر عمل کرتی ہیں۔

ق پر کا دباؤ = ن پر کا دباؤ = کرہ ہوائی کا دباؤ

نیز ا پر کا دباؤ = ق پر کا دباؤ + ستون ل م کا وزن

اسلئے مائع کا جو دباؤ ا پر ہے وہ کرہ ہوائی کے دباؤ سے زیادہ ہے پس ا پر کا مائع بہنا شروع کریگا اور شاخ ب ا کا مائع اس کی جگہ پر آجائیگا اس طرح ب پر کچھ خلا پیدا ہوجانا چاہئے لیکن درحقیقت اگر شاخ م ب کا طول پارہ کے بارپیما کے

ارتفاع ف سے کم ہو تو ظرف کا پانی کرۂ ہوائی کے دباؤ کی وجہ سے نلی ج ب کے اندر بالتدریج چڑھتا رہیگا اور اس طرح سے ا میں سے ایک مسلسل دھار نکلتی رہیگی۔

سیفن خود بخود چلنے والا آلہ ہے اور مائع کی اونچی ہمواری سے نیچی ہمواری تک مائع کے بہنے میں جو کام ہوتا ہے اسے قوت جاذبہ سرانجام دیتی ہے۔

۱۴۸۔ سیفن کے چلنے کے لیئے جن دو شرطوں کا پورا ہونا لازمی ہے وہ حسب ذیل ہیں۔

(۱) سرا ا یا اگر یہ سرا مائع کے اندر ڈوبا ہوا ہو تو اس مائع کا ارتفاع، اس ظرف کے مائع کی سطح سے نیچا ہونا چاہیئے جس کو خالی کرنا منظور ہے ورنہ مائع کا جو دباؤ ا پر ہوگا وہ کرۂ ہوائی کے دباؤ سے زیادہ ہونے کی بجائے کم ہوگا اور مائع ا میں سے بہنا شروع نہیں کریگا۔

(۲) سیفن کے بالاترین نقطہ کا جو ارتفاع ن پر کے مائع سے ہے وہ اسی مائع کے بارپیما کے ارتفاع سے کم ہونا چاہیئے، اگر ایسا نہ ہوگا تو کرۂ ہوائی کا دباؤ ھ ب کے ارتفاع والے ستون کو سہارنے کے ناقابل ہوگا، پانی کی صورت میں ب کا بڑے سے بڑا ارتفاع ن کے اوپر تقریباً ۳۴ فٹ ہوسکتا ہے اور پارہ کی صورت میں تقریباً ۳۰ انچ۔

۱۴۹۔ مشق سیفن کے ذریعہ ایک برتن میں سے پانی باہر بہہ رہا ہے اگر کرۂ ہوائی کا دباؤ پہلے معدوم ہوجائے اور پھر قائم ہوجائے تو بتاؤ کہ کیا واقع ہوگا جبکہ (۱) سیفن کا نچلا سرا پانی میں غرق ہو (۲) پانی کے اندر غرق نہ ہو۔

پہلی صورت میں دونوں شاخوں کے اندر کا پانی پہلے اپنے اپنے ظرف کے اندر گر جائیگا اور سیفن کے اندر خلا ہوجائیگا۔ دباؤ کے دوبارہ عود کرآنے پر

سیفن کا عمل شروع ہوجائیگا۔

دوسری صورت میں سیفن کی دونوں شاخیں پہلے حسب معمول خالی ہوجائینگی اور دباؤ کے عود کرانے پر ہوا نلی کے کھلے منہ میں سے داخل ہوکر اس کو بھردیگی اور سیفن کا عمل دوبارہ ازخود جاری نہیں ہوگا۔

امثلہ نمبری ۲۸

۱۔ اگر پارہ کے بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو اور پارہ کی کثافت اضافی ۶ء۱۳ ہو تو بتاؤ کہ ایک سیفن کی مدد سے پانی کس بلندی تک پہنچایا جاسکتا ہے۔

۲۔ پارہ کی کثافتِ اضافی ۶ء۱۳ ہے اور اس کے بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے بتاؤ کہ ایک سیفن کی مدد سے ایک سیال جس کی کثافت اضافی ۵ء۱ ہے کسی بلندی تک پہنچایا جاسکتا ہے۔

۳۔ ایک برتن کے اندر جس کی اونچائی ۳ فٹ ہے کچھ پارہ ہے اس کی کیا وجہ ہے کہ ایک سیفن کے ذریعہ تمام پارہ کا نکالنا ناممکن ہے۔

۴۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک برتن جس کی بلندی پانی کے بارپیما کے ارتفاع کے مساوی ہے تین چوتھائی پانی سے بھرا ہوا ہے۔ برتن میں ایک ہوا بند ڈھکنا ہے جس کے ایک ہوا بند سوراخ میں سے ایک سیفن گزرتی ہے۔ سیفن کا بالاترین نقطہ ڈھکنے کی سطح میں ہے اور اس کی لمبی شاخ کا سرا برتن کے پیندے کی ہمواری پر ہے۔ ثابت کرو کہ ایک تہائی پانی سیفن کے عمل سے نکالا جاسکتا ہے۔

۵۔ اگر سیفن کے دوران عمل میں (۱) اسکی لمبی شاخ میں (۲) چھوٹی شاخ میں ایک سوراخ کردیا جائے تو بتاؤ کہ کیا واقع ہوگا۔

۱۵۰ – اس باب میں ہم چند ایسی سطحوں پر کے دباؤ کے مرکز از سر نو معلوم کرینگے جو مائع کے اندر غرق ہوں، ان میں سے بعض نتائج قبل ازایں دفعہ ۴۳ میں بتائے جا چکے ہیں۔

۱۵۱ – ایک مستوی پترا مائع کے اندر غرق ہے، اس پر کے دباؤ کے مرکز کے معلوم کرنے کا عملی طریقہ حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ مستوی پترا ا ب ج ہے، اس کے محیط پر کے سب نقطوں ا، ب، ج، ..... میں سے انتصابی خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ، .....

کھینچو جو مائع کی سطح سے بالترتیب نقاط اَ، بَ، جَ، ..... پر ملیں، جو اسطوانہ اس طرح سے حاصل ہوتا ہے اس کے توازن پر غور کرو۔

جو قوتیں اس کی منحنی سطح پر عمل کرتی ہیں وہ سب کی سب متوازی الافق ہیں اسلیئے انتصابی سمت میں ان کا کوئی جزو ترکیبی نہیں ہے۔

جو قوتیں مستوی قاعدہ ا ب ج پر عمود وار ہیں وہ متوازی قوتوں کی ترکیب کے ضوابط کی رو سے ایک قوتِ واحد میں ترکیب دی جاسکتی ہیں (دیکھو علم سکون دفعہ ۵۳) اور یہ قوت ا ب ج پر عمود وار عمل کرتی ہے اور چہرے کے دباؤ کے مرکز ن میں سے گزرتی ہے۔

اس قوتِ واحد کا انتصابی جزو ترکیبی بموجب دفعہ ۴۵ سطح پر کا حاصل انتصابی دباؤ ہے، اس لیئے یہ قوت لازماً اسطوانہ مذکور کے وزن کا موازنہ کرتی ہے جو اسطوانہ کے مرکز ثقل ث میں سے نیچے کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ث ن ایک انتصابی خط مستقیم ہے۔

پس اگر ایک غرق شدہ مستوی سطح کے محیط پر کے ہر ایک نقطہ سے مائع کی سطح تک انتصابی خط کھینچے جائیں اور اس طرح جو سیالی اسطوانہ بنے اسکے مرکز ثقل میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو سطح مستوی پر کا وہ نقطہ جہاں موخرالذکر انتصابی خط سطح مذکور سے ملیگا سطح پر کے دباؤ کا مرکز ہوگا۔

اگر ا ب ج کی سطح مستوی انتصابی ہو تو بظاہر متذکرہ بالا عمل سودمند نہ ہوگا لیکن اس صورت پر اس طرح غور کرو۔

فرض کرو کہ سطح مستوی ا ب ج انتصابی نہیں ہے

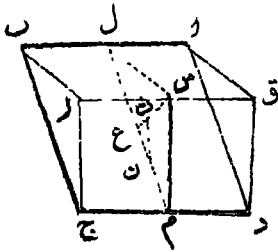
اور اس کی سطح مائع کی سطح سے خط س ط پر ملتی ہے، اب سطح مستوی س ط ا ج ب کو محور س ط کے گرد گھما کر کسی دوسرے محل میں لے آؤ خواہ اس محل میں یہ سطح انتصابی ہی کیوں نہ ہو ایسا کرنے سے ہر ایک نقطہ پر کے دباؤ میں ایک ہی نسبت سے تبدیلی واقع ہوگی اور ان دباؤں کی متوازی قوتوں کا نظام ایک ہی زاویہ میں سے گھوم جائیگا اس لئے متوازی قوتوں کی ترکیب کے اصول کی رُو سے ان کے مرکز کے مقام میں کوئی تغیر واقع نہ ہوگا۔

۱۵۲۔ ایک مستطیلی پترا کسی متجانس الاجزا مائع کے اندر اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع مائع کی سطح میں ہے، پترے پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

(دفعہ ہٰذا اور نیز بعد کی دو دفعات احصاء تکملات کی رو سے بھی ثابت کی گئی ہیں، دیکھو ضمیمہ)

فرض کرو کہ مستطیل ا ب ج د کا ضلع ا ب مائع کی سطح میں ہے اور اس کی سطح، ج د میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی کے ساتھ کوئی خاص محدود زاویہ بناتی ہے۔

خطوط ب ج، ج د، د ا پر کے ہر ایک نقطہ سے انتصابی خط کھینچو، فرض کرو کہ یہ خط مائع کی سطح سے ب ر، ر ق، ق ا پر ملتے ہیں۔

تب دفعہ ۱۵۱ کی رُو سے مستطیل پر کے دباؤ کا مرکز نقطہ ن پر اُس جگہ واقع ہے جہاں سیالی فانہ (ج د ب ر ق ا) کے مرکز ثقل ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط مستطیل

ا ب ج د سے ملتا ہے۔

فرض کرو کہ اب، اج د، اق کے وسطی نقطے بالترتیب ل، م س ہیں، تب ظاہر ہے کہ فانہ مذکور کا مرکز ثقل وہی ہوگا جو مثلث ل م س کا ہے۔

پس اگر ل م کی تنصیف نقطہ ع پر کی جائے اور ع س پر ایک نقطہ ث ایسا لیا جائے کہ ع ث = $\frac{1}{3}$ ع س تو ث مطلوبہ مرکز ثقل ہوگا۔

اگر ث ن ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو متشابہ مثلثوں سے

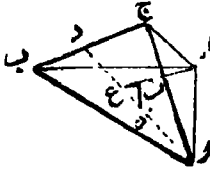
ع ن : ع م = ع ث : ع س = $\frac{1}{3}$

∴ ع ن = $\frac{1}{3}$ ع م = $\frac{1}{6}$ ل م

اور ل ن = ل ع + ع ن = $\frac{1}{2}$ ل م + $\frac{1}{6}$ ل م = $\frac{2}{3}$ ل م

پس مستطیل پر کے دباؤ کا مرکز اس کے وسطی خط کا وہ نقطہ ہوتا ہے جس کا فاصلہ اوپر کے ضلع سے اس خط کے طول کا دو تہائی ہو۔

فرع - اگر مستطیل کو اب کے گرد اتنا گھمایا جائے کہ اس کی سطح انتصابی ہوجائے تو اس کے مرکز دباؤ کے مقام میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہوگی۔

۱۵۳ - ایک مثلث کسی متجانس الاجزا مائع کے اندر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع مائع کی سطح میں ہے، مثلث

پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا قاعدہ ب ج مائع کی سطح میں ہے اور مثلث کی سطح سمت انتصابی کے ساتھ کوئی محدود زاویہ بناتی ہے۔ ا میں سے ایک انتصابی خط ا ر کھینچو جو مائع کی سطح سے ر پر ملے۔

تب بموجب دفعہ ۱۵۱ مطلوبہ مرکز دباؤ وہ نقطہ ہوگا جہاں سیالی ذو اربعۃ السطوح ا ب ج ر کے مرکز ثقل ث میں گزرنے والا انتصابی خط مثلث ا ب ج سے ملتا ہے۔

اب ب ج کی تنصیف د پر کرو اور ا د پر ع ایک ایسا نقطہ لو کہ د ع = $\frac{۱}{۳}$ د ا، اسی طرح ع ر پر ث ایک ایسا نقطہ لو کہ ع ث = $\frac{۱}{۴}$ ع ر، تب (علم سکون دفعہ ۱۰۷ کی رو سے) ث مرکز ثقل ہے ا ب ج ر کا، پس اگر ث میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے جو ا ب ج سے ن پر ملے تو ن مطلوبہ مرکز دباؤ ہوگا۔

متشابہ مثلثوں سے ع ن : ع ا = ع ث : ع ر = ۱ : ۴

∴ ع ن = $\frac{۱}{۴}$ ع ا = $\frac{۱}{۴}$ × $\frac{۲}{۳}$ د ا = $\frac{۱}{۶}$ د ا

∴ د ن = د ع + ع ن = $\frac{۱}{۳}$ د ا + $\frac{۱}{۶}$ د ا = $\frac{۱}{۲}$ د ا

پس مرکز دباؤ ن خط وسطی د ا کی تنصیف کرتا ہے۔

فرع ۔ اگر نقطہ ا کی انتصابی گہرائی ب ج کے نیچے عہ ہو، مائع کے اکائی حجم کا وزن وٖ ہو اور △ مثلث کے رقبہ کو تعبیر کرے تو مجموعی دباؤ جو ن پر عمل کرتا ہے

= وٖ × △ × مثلث کے مرکز ثقل کی گہرائی

= وٖ × △ × $\frac{\text{عہ}}{۳}$

اس سے ظاہر ہے کہ مثلث پر کا مجموعی دباؤ دو برابر قوتوں کے مساوی ہے جو اب اور اج کے وسطی نقاط پر عمل کرتی ہے اور ہر ایک قوت $\frac{۱}{۶}$ وٖ × △ × عہ کے مساوی ہے۔

متبادل ثبوت ۔ مثلث کے قاعدہ ب ج کے متوازی خطوط کھینچنے سے مثلث کو نہایت چھوٹے لیکن مساوی عرض کے بیشمار ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

فرض کرو کہ ن ق ی ھ اور نَ قَ یَ ھَ ایسے دو ٹکڑے ہیں جو بالترتیب ب ج اور ا سے متساوی الفصل ہیں یعنی در = ارَ

چونکہ عرض رس اور رَسَ باہم مساوی ہیں اس لئے ن ق ی ھ اور نَ قَ یَ ھَ کے رقبے بالترتیب ن ق اور نَ قَ کے متناسب ہونگے۔

نیز ظاہر ہے کہ ن ی ق ھ کے ہر ایک نقطہ پر کا دباؤ بالآخر ر د کے متناسب ہے اور نَ یَ قَ ھَ کے ہر ایک نقطہ پر کا دباؤ بالآخر رَ د کے متناسب ہے۔

اس لئے $\frac{\text{ن ی پر کا کل دباؤ}}{\text{نَ یَ پر کا کل دباؤ}} = \frac{\text{ن ق × د ر}}{\text{نَ قَ × د رَ}}$

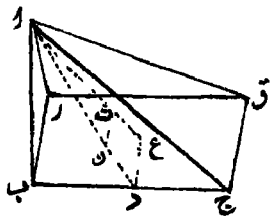
$$= \frac{\text{ق ر}}{\text{ق رَ}} \times \frac{\text{ا رَ}}{\text{ا ر}} = \frac{\text{ا ر}}{\text{ا رَ}} \times \frac{\text{ا رَ}}{\text{ا ر}} = ۱$$

پس ن ی اور نَ یَ پر کے دباؤ باہم مساوی ہیں اور اد کے وسطی نقطہ و سے مساوی فاصلوں پر عمل کرتے ہیں، اس لئے ان کا حاصل و میں سے گزرتا ہے۔

اسی طرح ٹکڑوں کے کسی اور ایسے ہی زوج کے لئے۔

پس ثابت ہوا کہ پورے مثلث پر کے دباؤ کا مرکز و پر ہے جو خطِ وسطی د ا کا وسطی نقطہ ہے۔

۱۵۴ — ایک مثلث مائع کے اندر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا ایک راس مائع کی سطح میں ہے اور مقابل کا کنارہ متوازی الافق ہے، مثلث پر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا راس ا مائع کی سطح میں ہے اور کنارہ ب ج متوازی الافق ہے۔ ب اور ج میں سے انتصابی خط کھینچو جو مائع کی سطح سے بالترتیب نقاط ر اور ق پر ملیں، تب دفعہ ۱۵۱ کی رُو سے مطلوبہ مرکزِ دباؤ وہ نقطہ ہے جس پر ا ب ج ق ر کے مرکزِ ثقل میں سے گذرنیوالا انتصابی خط مثلث ا ب ج سے ملتا ہے۔

چونکہ ب ج متوازی الافق ہے اسلیئے یہ ر ق کے مساوی ہے
لہذا اگر مستطیل ب ج ق ر کا مرکز ع ہو تو (ا ب ج ق ر)
کا مرکز ثقل ع ا پر کا ایک ایسا نقطہ ث ہے کہ ا ث = $\frac{۳}{۴}$ ا ع
ع سے ب ج پر عمود کھینچو جو ب ج سے د پر ملے، تب د،
ب ج کا وسطی نقطہ ہوگا۔
ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط ث ن کھینچو جو ا د سے
ن پر ملے۔

تب ن مطلوبہ مرکزِ دباؤ ہوگا۔

متشابہ مثلثوں سے ا ن : ا د = ا ث : ا ع = $\frac{۳}{۴}$

∴ ا ن = $\frac{۳}{۴}$ ا د

اسلیئے مطلوبہ مرکزِ دباؤ خطِ وسطی کو نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے

۱۵۵۔ ذیل میں گذشتہ دفعات کے نتائج کو حاصل کرنے کا ایک اور طریقہ درج کیا گیا ہے، اس طریقہ میں رقبہ کو پہلے بہت پتلے ٹکڑوں میں منقسم کیا گیا ہے جن میں سے ہر ایک پر کے دباؤ کی مقدار اور مرکز معلوم ہے اور پھر علم سکون دفعہ ۱۱۱ کے ضوابط کے مطابق تمام رقبہ پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کیا گیا ہے۔

۱۵۶۔ ایک مستطیل مائع کے اندر اسطرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع مائع کی سطح میں ہے، مستطیل پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا د = ا اور ا ب = ب

ضلع ا ب کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرو جہاں ن بہت بڑا ہے، تب فاصلوں ا ا، ا ا، ..... ا ا ..... ا ب میں سے ہر ایک فاصلہ ایک چھوٹی مقدار ب/ن کے مساوی ہے

نقاط ا، ا، ... میں سے ا د کے متوازی خطوطِ مستقیم کھینچ کر مستطیل کو کثیر التعداد مساوی پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

تب یہ خیال کیا جا سکتا ہے کہ اُن میں سے ہر ایک ٹکڑے کے سب نقطوں پر دباؤ مساوی ہیں، اس لئے ہر ایک ٹکڑے پر کا حاصل مجموعی دباؤ اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرے گا۔

پس مستطیل پر کا کل دباؤ ل م کے کسی نقطہ پر عمل کرے گا جہاں ل م خطوط ا د اور ب ج کے وسطی نقاط ل اور م کا خط وصل ہے۔

نیز چونکہ ا د بہت پتلا ہے اس لئے اس کا مرکزِ ثقل اور مرکزِ دباؤ دونوں قریب قریب ا د کے وسطی نقطہ پر منطبق ہونگے لہٰذا ان دونوں کا فاصلہ ل سے ر × ب/ن ہوگا۔

اب چونکہ ہر ایک ٹکڑے کا مجموعی دباؤ = اس کا رقبہ × اسکے مرکزِ ثقل کی گہرائی، اس لئے ٹکڑوں ا د، ا د، ..... ا ج پر کے مجموعی دباؤ بالترتیب

$$\frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\text{بَ}}{\text{ن}}،\ \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\text{۲بَ}}{\text{ن}}،\ \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\text{۳بَ}}{\text{ن}}،\ \ldots\ldots\ \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\text{(ن-۱)بَ}}{\text{ن}}$$

کے مساوی ہیں اور ل سے بالترتیب بَ/ن، ۲بَ/ن، ۳بَ/ن، .... فاصلوں پر عمل کرتے ہیں۔

پس اگر مطلوبہ دباؤ کے مرکز کا فاصلہ ل سے لَا ہو تو حسب دفعہ دفعہ ۱۱۱ علم سکون

$$\bar{\text{لا}} = \dfrac{\frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \left(\frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ن}}\right)^2 + \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \left(\frac{2\bar{\text{ب}}}{\text{ن}}\right)^2 + \cdots + \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \left(\frac{\overline{\text{ن}-1}\,\bar{\text{ب}}}{\text{ن}}\right)^2}{\frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ن}} + \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{2\bar{\text{ب}}}{\text{ن}} + \cdots + \frac{\text{اَبَ}}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\bar{\text{ب}}}$$

$$= \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ن}} \times \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (\text{ن}-1)^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + (\text{ن}-1)} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ن}} \times \dfrac{\frac{(\text{ن}-1)\,\text{ن}\,(2\text{ن}-1)}{6}}{\frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)}{2}}$$

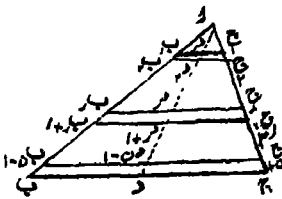
$$= \frac{\bar{\text{ب}}}{3} \times \frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}} = \frac{2\bar{\text{ب}}}{3}\left[1 - \frac{1}{2\text{ن}}\right]$$

اب ن کو لاانتہا بڑھا دو جس سے $\frac{1}{\text{ن}}$ بالآخر صفر ہو جائے گا۔

$\therefore\ \bar{\text{لا}} = \frac{2\bar{\text{ب}}}{3}$ حسب سابق [دفعہ ۱۵۲]

نتیجہ صریح۔ اگر مستطیل کی بجائے ایک متوازی الاضلاع لیا جائے جس کا ایک ضلع مائع کی سطح میں ہو تو بھی دفعہ ہذا اور دفعہ ۱۵۲ کے ثبوت برقرار رہتے ہیں۔

۱۵۷۔ ایک مثلث کسی مائع کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اس کا راس مائع کی سطح میں ہے اور مقابل کا کنارہ متوازی الافق ہے، مثلث پر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اد = دَ جہاں د قاعدہ ب ج کا وسطی نقطہ ہے، مثلث کے قاعدہ ب ج کے متوازی خطوط مستقیم ب۱ج۱، ب۲ج۲،....

... بر جر، ..... بن-۱ جن-۱ کھینچ کر مثلث کو کثیر التعداد مساوی
عرض والے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو اور فرض کرو ایسے ٹکڑے
ن ہیں، تب خط ا د نقاط د، د۲ .... در ..... دن-۱ پر
ن مساوی فاصلوں ا د، د د۲، .... در در+۱ ..... دن-۱ د میں
تقسیم ہو جائیگا جن میں سے ہر ایک ٹکڑے کا عرض دَ/ن ہوگا۔
متشابہ مثلثوں سے بر جر = ا در / ا د × اَ جہاں اَ قاعدہ
ب ج کا طول ہے۔

اسلئے پتلے ٹکڑے بر جر جر+۱ بر+۱ کا رقبہ ∝ اَ ر یعنی ∝ ر/ن دَ
نیز اس ٹکڑے کا مرکز ثقل جو در در+۱ کا وسطی نقطہ ہے قریب
قریب در پر منطبق ہوتا ہے اس لئے اس کی گہرائی بھی ∝ ر/ن دَ
پس بر جر+۱ پر کا کل دباؤ ∝ ر²/ن² دَ²
اب اس ٹکڑے پر کے دباؤ کا مرکز قریب قریب در ہے
اور اس کا فاصلہ ا سے ر/ن دَ ہے۔
اسلئے متوازی قوتوں کا مرکز معلوم کرنے کے طریقہ کے
مطابق

لَ = مجـ (ہر ایک جزو پر کا دباؤ × اسکے مرکز دباؤ کا فاصلہ) / مجـ ہر ایک جزو پر کا دباؤ

= مجـ (ر²/ن² دَ² × ر/ن دَ) / مجـ (ر²/ن² × دَ²)، ایک سے لیکر ن-۱ تک ر کی سب
قیمتوں کے لئے

$$= \frac{\frac{2د}{ن^3}\left[1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+(ن-1)^3\right]}{\frac{د}{ن^2}\left[1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots+(ن-1)^2\right]} = \frac{د}{ن} \times \frac{\left\{\frac{(ن-1)\times ن}{2}\right\}^2}{\frac{(ن-1)ن(2ن-1)}{6}}$$

$$= \frac{6}{4}\,\frac{ن-1}{2ن-1}\,د = \frac{3}{2}\,\frac{1-\frac{1}{ن}}{1-\frac{1}{2ن}}\,د$$

اب ن کو لا انتہا بڑھا دو جس سے $\frac{1}{ن}$ نہایت چھوٹا ہو جائیگا

تب $\overline{لا} = \frac{3د}{4} = \frac{3}{4}$ ا د

امثلہ نمبری ۲۹

ا۔ ایک مثلث کسی مائع کے اندر اس طرح ڈوبا ہوا ہے کہ اس کا قاعدہ مائع کی سطح میں ہے، مثلث پر ایک افقی خط کھینچا گیا ہے جو اس کے مرکز دباؤ میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ خط مثلث کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن پر کے مجموعی دباؤ باہم مساوی ہیں۔

۲۔ ایک مکعب نما صندوق کا ایک بے وزن ڈھکنا ہے جو ایک قبضہ کے ذریعہ اس کے ایک کنارہ کے گرد بلا تکلف گھوم سکتا ہے، صندوق کے گرد ایک رسی بندھی ہے جو اس کنارے اور نیز اس کے باقی تین متوازی کناروں کے وسطی نقطوں پر سے گزرتی ہے، صندوق کو پانی سے بھر کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا ڈھکنا انتصابی ہے اور قبضہ والا کنارہ اوپر کی طرف ہے، ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ پانی کے وزن کا ایک تہائی ہے۔

۳۔ نصف مکعب کی شکل کا ایک صندوق دھات کی ایک پتلی چادر کا

بنا ہوا ہے، اس کے ایک کنارہ کو ایک انتصابی دیوار کے ساتھ قبضہ کے ذریعہ اس طرح لگا دیا گیا ہے کہ یہ کنارہ متوازی الافق ہے اور صندوق کا ایک مربع رُخ دیوار سے مس کرتا ہے، اگر اس رخ کو ہٹا کر صندوق کے اندر پانی بھرا جائے اور پانی باہر نہ نکلے تو دھات کا وزن فی مکعب فٹ دریافت کرو جبکہ مکعب کے ایک کنارہ کا طول ۲ فٹ ہو۔

۴ — ایک مستطیل مائع کے اندر اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کے دو کنارے افق کے متوازی ہیں اور ان کی گہرائیاں بالترتیب مائع کی سطح کے نیچے ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ اس کے مرکز دباؤ کی گہرائی

$$\frac{2}{3}\,\frac{ا^2 + اب + ب^2}{ا + ب} \text{ ہے۔}$$

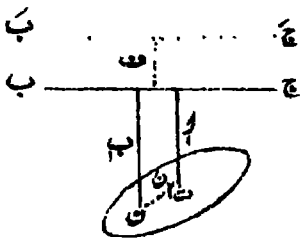
[مستطیل کے اُن اضلاع کو خارج کرو جو افقی اضلاع پر عمود ہیں حتیٰ کہ یہ مائع کی سطح سے مل جائیں، تب مستطیل زیر بحث پر جو دباؤ ہے وہ اُن مستطیلوں کے مجموعی دباؤ کے فرق کے مساوی ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک ضلع مائع کی سطح میں ہے، ان موخرالذکر مستطیلوں پر کے مجموعی دباؤ اور نیز اِن دباؤں کے مرکز دفعات ۴۹ اور ۵۶ کی رو سے معلوم کرو اور پھر علم سکون دفعہ ۱۱۶ کے مطابق عمل کرو]

۵ — ایک منحرف کے متوازی اضلاع کے طول بالترتیب ا اور ب ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ف ہے، اگر منحرف کو مائع کے اندر اس طرح غرق کیا جائے کہ اس کی سطح انتصابی ہو اور ضلع ا پانی کی سطح میں ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز پانی کی سطح کے نیچے $\frac{ف}{2} \times \frac{ا + 3ب}{ا + 2ب}$ گہرائی پہ ہوگا۔

۶- ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کسی مائع کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اس کا ضلع ج د مائع کی سطح میں ہے اور اضلاع ا د، ب ج جن کے طول بالترتیب عہ اور بہ ہیں انتصابی ہیں، ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی $\frac{1}{2} \cdot \frac{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)(\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{عہ}^2 + \text{عہ}\,\text{بہ} + \text{بہ}^2}$ ہے۔

۷- مکعب کی شکل کے ایک صندوق کا ایک ٹھیک آنیوالا وزنی ڈھکنا ہے جو چکنے قبضوں کے ذریعہ ایک کنارہ کے ساتھ لگا دیا گیا ہے۔ صندوق کو پانی سے بھرا گیا ہے۔ صندوق کو اس کے قاعدہ کے مختلف کناروں کے گرد جن زاویوں میں سے گھمانے سے پانی میں نکلنا شروع ہو جائے ان کے مماسوں کا مقابلہ کرو۔

۸- دفعہ ۱۵۴ کی صورت کو دفعات ۱۵۲ اور ۱۵۳ کی صورتوں کا فرق سمجھکر دباؤ کا مرکز محسوب کرو۔

۱۵۸ — ایک مستوی رقبہ کو کسی متجانس الاجزا مائع کے اندر غرق کیا گیا ہے، اس کے مرکز ثقل کی گہرائی لا اور دباؤ کے مرکز کی گہرائی ب ہے۔ اگر اس رقبہ کو بغیر گھمانے کے اور نیچے کر دیا جائے تو دباؤ کے مرکز کا نیا مقام دریافت کرو۔

فرض کرو کہ پہلی صورت میں پانی کی سطح ب ج پر ہے اور مرکز ثقل اور مرکز دباؤ بالترتیب ث اور ن پر ہیں۔

اب فرض کرو کہ رقبہ کو فاصلہ فہ اور نیچے کر دیا گیا ہے یا بالفاظ دیگر پہلے مائع کے اوپر مزید مائع گہرائی ف تک بھر دیا گیا ہے۔

ابتدائی حالت میں مجموعی دباؤ $\text{ر}\,\text{ا}_1\,\text{و}_1$ تھا جو ن پر عمل کرتا تھا (دفعہ ۳۹) جہاں رقبہ مفروضہ ر کے مساوی ہے اور مائع کے اکائی حجم کا وزن و_1 ہے ۔

اس مائع کے اوپر مزید مائع ڈال دینے کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ رقبہ ر کے ہر جزو پر دباؤ بڑھ جاتا ہے اور یہ اضافہ اس دباؤ کے مساوی ہے جو گہرائی ف کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے، یعنی رقبہ ر کی ہر اکائی پر دباؤ $\text{و}_1\,\text{ف}$ زیادہ ہو جاتا ہے، اسلئے ان مزید دباؤں کا حاصل $\text{ر}\,\text{و}_1\,\text{ف}$ کے مساوی ہے جو ث پر عمل کرتا ہے ۔

اب قوت $\text{ر}\,\text{و}_1\,\text{ف}$، ث پر عمل کرتی ہے اور $\text{ر}\,\text{ا}_1\,\text{و}_1$، ن پر عمل کرتی ہے، ان قوتوں کا حاصل جس نقطہ نَ میں سے عمل کرتا ہے وہی نقطہ صریحاً دباؤ کا نیا مرکز ہے ۔

متوازی قوتوں کی ترکیب کے ضوابط سے ظاہر ہے کہ نَ خط ن ث پر کا ایسا نقطہ ہے کہ

$$\text{ن نَ} : \text{نَ ث} = \text{ر}\,\text{و}_1\,\text{ف} : \text{ر}\,\text{ا}_1\,\text{و}_1 = \text{ف} : \text{ا}_1$$

۱۵۹ — گزشتہ دفعہ میں ثَ جَ کے گرد معیار اثر لینے سے دَ جَ کے نیچے نَ کی گہرائی

$$= \frac{\text{ر}\,\text{ا}_1\,\text{و}_1 \times (\text{ب}_1 + \text{ف}) + \text{ر}\,\text{ف}\,\text{و}_1 \times (\text{ا}_1 + \text{ف})}{\text{ر}\,\text{ا}_1\,\text{و}_1 + \text{ر}\,\text{ف}\,\text{و}_1} = \frac{\text{ف}^2 + 2\,\text{ا}_1\,\text{ف} + \text{ا}_1\,\text{ب}_1}{\text{ف} + \text{ا}_1}$$

پس دباؤ کے نئے مرکز کی گہرائی نئی سطح کے نیچے ۔ دباؤ کے ابتدائی مرکز کی گہرائی ابتدائی سطح کے نیچے

$$= \frac{\text{ف}^2 + 2\,\text{ل}_1\text{ف} + \text{ل}_1\text{ب}_1}{\text{ف} + \text{ل}_1} - \text{ب}_1 = \text{ف} \times \frac{2\text{ل}_1 - \text{ب}_1 + \text{ف}}{\text{ل}_1 + \text{ف}}$$

پس پانی کی سطح کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی میں مندرجہ بالا مقدار کا اضافہ ہو جاتا ہے۔

نیز نَ کی گہرائی بَ جَ کے نیچے ـ ن کی گہرائی بَ جَ کے نیچے

$$= \frac{\text{ف}^2 + 2\,\text{ل}\,\text{ف} + \text{ل}_1\text{ب}}{\text{ف} + \text{ل}} - (\text{ب}_1 + \text{ف}) = -\text{ف}\,\frac{\text{ب}_1 - \text{ل}}{\text{ف} + \text{ل}}$$

یہ مقدار ہمیشہ منفی ہوتی ہے۔

پس رقبہ میں دباؤ کا مرکز فاصلہ $\text{ف}\,\frac{\text{ب}_1 - \text{ل}}{\text{ف} + \text{ل}}$ اوپر چڑھ جاتا ہے

نیز دوسری حالت میں دباؤ کا جو مرکز ہے اُس کے اور رقبہ کے مرکز ثقل کے درمیان انتصابی فاصلہ

$$\frac{\text{ف}^2 + 2\,\text{ل}_1\text{ف} + \text{ل}_1\text{ب}_1}{\text{ف} + \text{ل}_1} - (\text{ل}_1 + \text{ف}) = \frac{\text{ل}_1\text{ب}_1 - \text{ل}_1^2}{\text{ف} + \text{ل}_1} \text{ ہے}$$

اور ظاہر ہے کہ یہ معکوساً ایسے بدلتا ہے جیسے ف + ل یعنی معکوساً ایسے بدلتا ہے جیسے سطح کے نیچے مرکز ثقل کی گہرائی۔

اس سے ظاہر ہے کہ جوں جوں گہرائی زیادہ ہوتی جاتی ہے دباؤ کا مرکز، مرکز ثقل کے زیادہ قریب آتا جاتا ہے پس لا انتہا گہرائی پر دونوں مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں گے۔

۱۹۰ — اگر کسی رقبہ پر کے دباؤ کے مرکز کا مقام معلوم ہو جبکہ کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظر انداز کیا جائے تو اُس حالت میں جبکہ ہوا

کے دباؤ کو بھی ملحوظ رکھا جائے دباؤ کے مرکز کا مقام متعین ہوسکتا ہے
فرض کرو کہ اُس سیال کے بارپیما کا ارتفاع جس میں رقبہ مذکور ڈبویا گیا ہے ف ہے تب کرہ ہوائی کے دباؤ کو ملحوظ رکھتے ہوئے نئے مرکز کا دباؤ کی تعیین کے لئے مائع مذکور کے اوپر بلندی ف تک یہی مائع بھرا ہوا فرض کرلینا چاہئے جیسا کہ دفعہ ۱۵۸ کی شکل میں کیا گیا ہے۔

۱۶۱۔ مشق۔ بتاؤ کہ دفعہ ۱۵۲ کی صورت میں دباؤ کا جو مرکز ہے اس کے مقام پر اس کرۂ ہوائی کے دباؤ سے جو آبی بارپیما کے ارتفاع ف کے مساوی ہے کیا اثر پڑیگا۔

جس صورت میں ہوا کا دباؤ نہ ہو مستطیل پر کا کل دباؤ $\text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \frac{\text{ب}_1}{2} \times \text{و}$ کے مساوی ہے اور نقطہ ن پر عمل کرتا ہے جہاں

$$\text{ل ن} = \frac{2\,\text{ب}_1}{3}$$

کرۂ ہوائی کا دباؤ $\text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \text{ف} \times \text{و}$ کے مساوی ہے اور نقطہ ع پر عمل کرتا ہے جہاں $\text{ل ع} = \frac{\text{ب}_1}{2}$

ل کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ دباؤ کے نئے مرکز کا فاصلہ ل سے

$$= \frac{\text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \frac{\text{ب}_1}{2} \times \text{و} \times \frac{2\,\text{ب}_1}{3} + \text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \text{ف}\,\text{و} \times \frac{\text{ب}_1}{2}}{\text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \frac{\text{ب}_1\,\text{و}}{2} + \text{ا}_1 \text{ب}_1 \times \text{ف}\,\text{و}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ب}_1^2}{3} + \text{ف}\,\text{ب}_1}{\text{ب}_1 + 2\,\text{ف}} = \frac{\text{ب}_1}{3} \times \frac{2\,\text{ب}_1 + 3\,\text{ف}}{\text{ب}_1 + 2\,\text{ف}}$$

امثلہ نمبری ۳۰

۱ — ایک مربع پترا انتصاباً پانی کے اندر عین غرق ہے، پھر اسکو گہرائی ب تک اور ڈبویا گیا ہے، اگر پترے کے کنارہ کا طول ا ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا فاصلہ مربع کے مرکز سے $\frac{ا^2}{٦ا + ١٢ب}$ ہے۔

۲ — ایک مثلث کا قاعدہ ا ہے اور ارتفاع ف، مثلث کو پانی کے اندر انتصابی طور پر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ قاعدہ مذکور متوازی الافق ہے اور راس اوپر کی طرف ہے، اگر قاعدہ کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے گ ہو تو مثلث کے مرکزِ دباؤ کی گہرائی دریافت کرو۔

۳ — اگر گزشتہ مشق میں مثلث کو اس طرح انتصاباً ڈبویا جائے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہو، راس کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے گ ہو اور اسکا قاعدہ متوازی الافق ہو تو دباؤ کے مرکز کی گہرائی دریافت کرو۔

۴ — ایک متساوی الاضلاع مثلث جس کا ہر ایک کنارہ $٦\sqrt{٣}$ فٹ ہے پانی کے اندر انتصاباً اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع پانی کی سطح میں ہے، اگر پانی کا بار ۶۲٫۴ فٹ پر ہو تو مثلث پر کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی دریافت کرو۔

۵ — ایک مثلث کو کسی مائع کے اندر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ مائع کی سطح میں ہے اور راس نیچے کی طرف، مثلث کے مرکزِ ثقل کی گہرائی مائع کی سطح کے نیچے گ ہے، کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظر انداز کر کے مثلث کے مرکزِ دباؤ کا مقام دریافت کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر کرۂ ہوائی کے دباؤ کو ملحوظ رکھا جائے تو دباؤ کے مرکز کا نیا مقام پہلے مقام

سے $\frac{1}{2}$ $\frac{گ ف}{ف + گ}$ اوپر ہوگا جہاں ف پانی کے بارپیما کا ارتفاع ہے

۶ ۔ اگر سشق ماقبل میں مثلث کا قاعدہ متوازی الافق ہو اور راس مائع کی سطح میں، تو متناظر فاصلہ معلوم کرو ۔

۷ ۔ کسی مستوی رقبہ پر کے دباؤ کے مرکز کا مقام معلوم ہے جبکہ کرۂ ہوائی کے دباؤ کو نظرانداز کیا جائے۔ اگر ہوا کے دباؤ کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو ثابت کرو کہ مقام مذکور ذیل کے کلیہ کی مدد سے محسوب ہو سکتا ہے :

اول الذکر صورت میں مرکز ثقل اور مرکز دباؤ کی جو گہرائیاں ہیں اُن دونوں میں مائع کے بارپیما کا ارتفاع جمع کرو، تب ان مجموعوں کو آپس میں جو نسبت ہے وہی نسبت مذکورہ بالا گہرائیوں کو آخرالذکر صورت میں ہوگی، نیز دباؤ کے دونوں مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے جو مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے ۔

۸ ۔ ایک مستوی رقبہ پانی کے اندر مکمل طور پر غرق ہے اور اس کی سطح انتصابی ہے، رقبہ مذکور کو گھومنے کے بغیر ایک انتصابی سطح مستوی میں یکساں رفتار کے ساتھ نیچے اتارا جاتا ہے، ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز رقبہ کے ہندسی مرکز میں سے گزرنے والے افقی خط کے قریب ایسی رفتار سے آتا جاتا ہے جو ہندسی مرکز کی گہرائی کے مربع کے بالعکس متناسب ہے ۔

۱۶۲ ۔ ایک مثلث کسی متجانس الاجزا سیال کے اندر ڈوبا ہوا ہے ثابت کرو کہ اس پر کے دباؤ کا مرکز اُن متوازی قوتوں کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جو مثلث مذکور کے اضلاع کے وسطی نقاط پر عمل کریں اور جن کی مقداریں ان نقاط کی گہرائیوں کے متناسب ہوں ۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا راس ا مائع کی سطح
میں ہے اور قاعدہ ب ج کسی محل میں
ہے۔ ب ج کو اتنا خارج کرو کہ یہ سطح سے
ک پر ملے، فرض کرو کہ اضلاع
ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقاط
بالترتیب د، ع، ف ہیں اور ج ک،
ب ک کے وسطی نقاط بالترتیب عَ، فَ ہیں۔
ا ک کو ک سے تعبیر کرو اور نیز فرض کرو کہ نقاط ب اور ج کی
گہرائیاں ا ک کے نیچے بالترتیب ہ اور ح ہیں، تب مثلث
ا ب ک کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ ہ ک
دفعہ ۱۵۳ نتیجہ صریح سے ا ب ک پر کا مجموعی دباؤ دو قوتوں
کے مساوی ہے جو نقاط ف اور فَ پر عمل کرتی ہیں اور جداگانہ
$\frac{1}{12}$ و ک ہ² کے مساوی ہیں۔ لیکن یہ دو قوتیں ان تین قوتوں
کے مساوی ہیں جن میں سے دو بالترتیب نقاط ا اور ک پر
عمل کرتی ہیں اور بلحاظ مقدار جداگانہ ل ہ² کے مساوی ہیں اور
تیسری ب پر عمل کرتی ہے جو ۲ ل ہ² کے مساوی ہے جہاں
ل = ک و / ۲۴
اسی طرح مثلث ا ج ک پر کا مجموعی دباؤ تین قوتوں کے
مساوی ہے۔ ان میں سے دو قوتیں جو جداگانہ ل ح² کے مساوی
ہیں ا اور ک پر عمل کرتی ہیں اور تیسری ۲ ل ح² ہے جو ج پر عمل
کرتی ہے۔

اب ا ب ج پر کا مجموعی دباؤ ا ب ک اور ا ج ک پر کے مجموعی دباؤں کے فرق کے مساوی ہے اسلئے یہ ذیل کی قوتوں کے مساوی ہے ۔

ا پر قوت لہ (بہ^{2} - جہ^{2})، ب پر قوت ۲ لہ بہ^{2}، ج پر قوت -۲ لہ جہ^{2} اور ک پر قوت لہ (بہ^{2} - جہ^{2}) ...... (۱)

نیز چونکہ ب ک : ج ک :: بہ : جہ اسلئے ک پر عمل کرنے والی ایک قوت (بہ - جہ) ب پر عمل کرنے والی قوت - جہ، اور ج پر عمل کرنے والی قوت بہ، دونوں کے حاصل کے مساوی ہے [دیکھو علم سکون دفعہ ۵۳]

اس کی بنا پر یہ فرض کر لینا جائز ہے کہ ک پر عمل کرنے والی قوت لہ (بہ^{2} - جہ^{2})

= ب پر قوت - لہ جہ (بہ + جہ)، اور ج پر قوت لہ بہ (بہ + جہ)

پس قوتیں (۱) مساوی ہیں ذیل کی قوتوں کے

ا پر قوت　لہ (بہ^{2} - جہ^{2})

ب پر قوت　۲ لہ بہ^{2} - لہ جہ (بہ + جہ) یعنی لہ (بہ - جہ) (۲ بہ + جہ)

ج پر قوت　-۲ لہ جہ^{2} + لہ بہ (بہ + جہ) یعنی لہ (بہ - جہ) (بہ + ۲ جہ) ....(۲)

اب مثلث ا ب ج کا رقبہ $\Delta = \frac{\text{ک ا . بہ}}{2} - \frac{\text{ک ا . جہ}}{2}$

لہذا $\text{لہ (بہ - جہ)} = \frac{\text{ک ا . و}}{24}\text{(بہ - جہ)} = \frac{\Delta\,\text{و}}{12}$

پس قوتیں (۲) ذیل کی قوتوں کے مساوی ہیں:-

ا پر قوت $\frac{\Delta\,\text{و}}{12}$ (بہ + جہ)، ب پر $\frac{\Delta\,\text{و}}{12}$ (۲ بہ + جہ)

اور ج پر قوت $\frac{و_1 \Delta}{۱۲}$ (بہ + ۲ جہ)

یعنی ف پر قوت $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times \frac{بہ}{۲}$، ع پر قوت $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times \frac{جہ}{۲}$ اور د پر قوت $\frac{و_1 \Delta}{۳} \left(\frac{بہ + جہ}{۲}\right)$

گویا دؔ عؔ فؔ پر کی قوتیں ان کی گہرائیوں کے متناسب ہیں۔

اب مثلث کو فاصلہ عَہ اور نیچے کر دو اور فرض کرو کہ ب اور ج کی نئی گہرائیاں بالترتیب بَہ اور جَہ ہیں

تب بَہ = عَہ + بہ اور جَہ = عَہ + جہ

مثلث کو اور نیچے غرق کردینے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ ا ب ج کے مرکزِ ثقل پر مزید مجموعی دباؤ و₁ × Δ × عَہ کا اضافہ ہو جاتا ہے یعنی دؔ عؔ فؔ میں سے ہر نقطہ پر دباؤ $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times$ عَہ کا اضافہ ہو جاتا ہے۔ [علم سکون دفعہ ۱۰۴]

پس مثلث پر کا مجموعی دباؤ مساوی ہے ذیل کی قوتوں کے

د پر $\frac{و_1 \Delta}{۳} \left(\frac{بہ + جہ}{۲} + عَہ\right)$ یعنی $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times \frac{بَہ + جَہ}{۲}$

ع پر $\frac{و_1 \Delta}{۳} \left(\frac{جہ}{۲} + عَہ\right)$ یعنی $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times \frac{جَہ + عَہ}{۲}$

ف پر $\frac{و_1 \Delta}{۳} \left(\frac{بہ}{۲} + عَہ\right)$ یعنی $\frac{و_1 \Delta}{۳} \times \frac{عَہ + بَہ}{۲}$

پس ثابت ہوا کہ خواہ مثلث کسی محل میں ہو اس پر کے دباؤ کا مرکز اُن متوازی قوتوں کے مرکز پر منطبق ہوگا جو مثلث کے اضلاع

کے وسطی نقطوں پر عمل کریں اور جن کی مقداریں ان کی گہرائیوں
کے متناسب ہوں۔

نتیجہ صریح — علم سکون دفعہ ۱۱۱ میں متوازی قوتوں کے مرکز کے
لئے جو ضابطہ دیا گیا ہے اس کی رُو سے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$= \frac{\frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{بہ+جہ}{۲}\right)^{۲} + \frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{جہ+عہ}{۲}\right)^{۲} + \frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{عہ+بہ}{۲}\right)^{۲}}{\frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{بہ+جہ}{۲}\right) + \frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{جہ+عہ}{۲}\right) + \frac{و\Delta}{۳}\left(\frac{عہ+بہ}{۲}\right)}$$

$$= \frac{(بہ+جہ)^{۲} + (جہ+عہ)^{۲} + (عہ+بہ)^{۲}}{۴(عہ+بہ+جہ)}$$

$$= \frac{عہ^{۲} + بہ^{۲} + جہ^{۲} + عہ\,بہ + عہ\,جہ + بہ\,جہ}{۲(عہ+بہ+جہ)}$$

۱۶۳ — مسئلہ گزشتہ کی رو سے بہت سی اشکال کے دباؤ کے مرکز
اُن کو مثلثوں میں تقسیم کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مشق — ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف کو پانی کے اندر اس طرح
غرق کیا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع ا ب پانی کی سطح میں ہے، ثابت کرو
کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی کو مرکز ثقل کی گہرائی کے ساتھ نسبت ۲۳ : ۱۸ ہوگی

فرض کرو کہ د اس کا مرکز ہے، و ا، و ب، .... و ف کے وسطی نقاط
بالترتیب ا، ب، ج .... ف ہیں اور ا ب، ب ج، ج د، د ع،
ع ف، ف ا کے وسطی نقاط بالترتیب ن، ق، ر، س، ط، ی، ہیں۔

فرض کرو کہ و ن = عہ

تب ق، ب، ا، ی میں سے ہر ایک کی گہرائی $\frac{عہ}{۲}$ ہے

ج، ف میں سے ہر ایک کی گہرائی عہ ہے

ر، د، ع، ط میں سے ہر ایک کی گہرائی $\frac{۳ عہ}{۲}$ ہے

اور س کی گہرائی ۲ عہ ہے

یہ مسدس جن چھ مثلثوں میں منقسم ہوگیا ہے، اُن سب کے رقبے باہم مساوی ہیں۔ اسلئے ہمیں ہر مثلث کے وسطی نقطہ پر ایک ایسی قوت لگانی چاہیے جو اُس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہو، اس طرح سے ہمیں ذیل کی قوتیں حاصل ہونگی۔

ایک قوت مساوی $\frac{\triangle \times و_۱}{۳} \times ۰$ کے گہرائی صفر پر

چھ قوتیں جن میں سے ہر ایک مساوی ہے $\frac{\triangle \times و_۱}{۳} \times \frac{عہ}{۲}$ کے گہرائی $\frac{عہ}{۲}$ پر

چار قوتیں " " $\frac{\triangle \times و_۱}{۳}$ عہ کے گہرائی عہ پر

چھ " " $\frac{۳ عہ}{۲} \times \frac{\triangle \times و_۱}{۳}$ " $\frac{۳ عہ}{۲}$ پر

ایک قوت مساوی $\frac{\triangle \times و_۱}{۳} \times ۲$ عہ کے گہرائی ۲ عہ پر

پس علم سکون دفعہ ۱۱۱ کی رُو سے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$= \frac{\frac{\triangle و_۱}{۳}\left\{۶\left(\frac{عہ}{۲}\right)^۲ + ۴ عہ^۲ + ۶\left(\frac{۳ عہ}{۲}\right)^۲ + (۲ عہ)^۲\right\}}{\frac{\triangle و_۱}{۳}\left\{۶ \times \frac{عہ}{۲} + ۴ \times عہ + ۶ \times \frac{۳ عہ}{۲} + ۲ عہ\right\}}$$

$$= عہ \times \frac{\frac{۶}{۴} + ۴ + \frac{۵۴}{۴} + ۴}{۳ + ۴ + ۹ + ۲} = \frac{۲۳}{۱۸} عہ$$

امثلہ نمبری ۳۱

ا — اگر ایک مثلث پترے کے راسوں کی گہرائیاں بالترتیب عہ، ب اور

جہ ہوں تو ثابت کرو کہ پترے کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی اس کے مرکزِ ثقل کی گہرائی سے بقدر

$$\frac{ع^2 + ب^2 + ج^2 - ع ب - ب ج - ج ع}{6(ع + ب + ج)}$$ سے زیادہ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مرکزِ دباؤ اُن متوازی قوتوں کا مرکز ہے جو اس کے راسوں پر عمل کریں اور بالترتیب

۲ ع + ب + ج، ع + ۲ ب + ج، ع + ب + ۲ ج کے متناسب ہوں۔

۲ — ایک مثلث ا ب ج کا راس ا پانی کی سطح میں ہے اور باقی دو راسوں ب اور ج کی گہرائیاں بالترتیب لا اور ہا ہیں، اگر پانی کے بار پیما کا ارتفاع ف ہو تو مثلث کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی دریافت کرو۔

۳ — ایک معیّن ایک مائع کے اندر اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا ایک راس مائع کی سطح میں ہے اور اس راس میں سے گزرنے والا وتر انتصابی ہے، ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز وتر کو نسبت ۷ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے۔

۴ — ایک مربع اس طرح غرق کیا گیا ہے کہ اس کا وتر انتصابی ہے اور اس کے سب سے نچلے کونے کی گہرائی مائع کی سطح کے نیچے سب سے اوپر کے کونے کی گہرائی سے دُگنی ہے، اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو۔

۵ — ایک معیّن اس طرح پورا غرق ہے کہ اس کا ایک وتر انتصابی ہے اور اس کے مرکز کی گہرائی گ ہے، ثابت کرو کہ اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی $گ + \frac{ا^2}{24 گ}$ ہے جہاں ۲ا انتصابی وتر کا طول ہے۔

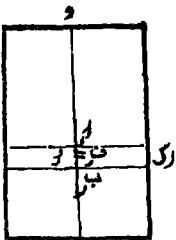
۶ — ایک متوازی الاضلاع کے کونوں کی گہرائیاں کسی مائع کی سطح کے نیچے بالترتیب $گ_1$، $گ_2$، $گ_3$، $گ_4$ ہیں اور اس کے مرکز کی

گہرائی گ ہے، ثابت کرو کہ اس پر کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{گ_۱^۲ + گ_۲^۲ + گ_۳^۲ + گ_۴^۲ + ۸ گ^۲}{۱۲ گ} \text{ ہے۔}$$

۷ — ایک منتظم مسدس پانی کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اس کا ایک ضلع پانی کی سطح میں ہے، بالائی نصف پر کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی دریافت کرو۔

۸ — ایک معیّن دو ایسے سیالوں کے اندر جو آپس میں نہیں ملتے اس طرح غرق ہے کہ اس کا راس اوپر کے سیال کی سطح میں ہے اور ایک وتر سطح مشترک میں ہے، اگر نیچے کے سیال کی کثافت اوپر کے سیال کی کثافت کی سہ چند ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز دوسرے وتر کو نسبت ۵ : ۳ سے تقسیم کرتا ہے۔

۹ — ایک مستطیل ن ایسے سیالوں کے اندر غرق ہے جو آپس میں نہیں ملتے اور جن کی کثافتیں اوپر کے سیال سے شروع ہو کر ک، ۲ک، ۳ک، .... ن ک ہیں، مستطیل کے اوپر کا ضلع بالاترین مائع کی اوپر کی سطح میں ہے اور جو رقبے مختلف سیالوں میں غرق ہیں وہ باہم مساوی ہیں، ثابت کرو کہ مستطیل پر کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی $\frac{۳ن + ۱}{۲ن + ۱} \times \frac{ف}{۲}$ ہے جہاں ف سب سے نچلے ضلع کی گہرائی ہے۔

فرض کرو کہ اُس رقبہ کا مرکز ثقل جو ر ویں سیال کے اندر غرق ہے $ف_ر$ ہے اور اس رقبہ کے دباؤ کا وہ مرکز جو اس سیال کے اوپر کوئی اور سیال نہ ہونے کی صورت میں ہوتا $د_ر$ ہے۔

اب اگر مستطیل کے بالاترین ضلع کا وسطی نقطہ و ہو تو

و $ا_ر = (ر-۱) \frac{ف}{ن}$ ، $ا ث_ر = \frac{ف}{۲ن}$ ، $ا د_ر = \frac{۲}{۳} \times \frac{ف}{ن}$

دفعہ ۴۲ مشق ۳ کے بموجب ہم $ا_ر$ کے اوپر کے سیالوں کی بجائے ایک ایسا سیال لے سکتے ہیں جکی موٹائی لا ہو اور کثافت ر ک، جہاں

$$لا \times رک = \frac{ف}{ن} ک \left[۱ + ۲ + \cdots + (ر-۱) \right] = \frac{ف}{ن} \times \frac{(ر-۱) ر}{۲} ک$$

یعنی $$لا = \frac{(ر-۱) ف}{۲ ن}$$

اس لئے دفعہ ۱۵۸ کے قاعدہ کی رو سے جو حصہ ر ک کثافت والے سیال کے اندر غرق ہے اس پر کا دباؤ مساوی ہے ان قوتوں کے :-

$ث_ر$ پر قوت $ا \times رک \times لا$ اور $د_ر$ پر $ا \times رک \times \frac{ف}{۲ن}$

جہاں $ا$ مستطیل کے اس حصہ کا رقبہ ہے

پس متوازی قوتوں کے مرکز معلوم کرنے کے قاعدہ کی رُو سے

$$\bar{و} = \frac{\sum^{ن} \left(ا \times رک \times لا \times و ث_ر + ا رک \times \frac{ف}{۲ن} \times و د_ر \right)}{\sum^{ن} \left(ا \times رک \times لا \times ا \times رک \times \frac{ف}{۲ن} \right)}$$

$$= \frac{\sum_{ر=۱}^{ر=ن} \left[ر(ر-۱) \frac{ف}{۲ن} \left\{ (ر-۱) \frac{ف}{ن} + \frac{ف}{۲ن} \right\} + ر \frac{ف}{۲ن} \left\{ (ر-۱) \frac{ف}{ن} + \frac{۲}{۳} \times \frac{ف}{ن} \right\} \right]}{\sum_{ر=۱}^{ر=ن} \left[ر(ر-۱) \frac{ف}{۲ن} + ر \frac{ف}{۲ن} \right]}$$

$$= \frac{ف}{۲ن} \times \frac{\sum_{۱}^{ن} \left[ر(ر-۱)(۲ر-۱) + (۲ر - \frac{۲}{۳}) \right]}{\sum_{۱}^{ن} \left[ر^۲ \right]}$$

$$= \frac{ف}{۶ن} \cdot \frac{\sum_{۱}^{ن} (۶ر^۳ - ۳ر^۲ + ر)}{\sum_{۱}^{ن} ر^۲}$$

$$= \frac{ف}{6ن} \times \frac{6\left[\frac{ن(ن+1)}{2}\right]^{2} - 3\times\frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6} + \frac{ن(ن+1)}{2}}{\frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}}$$

$$= \frac{ف}{6ن} \times 3 \times \frac{ن^{2}(ن+1)(3ن+1)}{ن(ن+1)(2ن+1)}$$

$$= \frac{ف}{2} \times \frac{3ن+1}{2ن+1}$$

۱۰ — ایک مستوی ذوار بعتہ الاضلاع ا ب ج د اس طرح پورا پانی میں غرق ہے کہ اس کا ضلع ا ب پانی کی سطح میں ہے، اگر ج اور د کی گہرائیاں سطح کے نیچے بالترتیب جہ اور لہ ہوں اور مرکز ثقل کی گہرائی ف ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی $\frac{جہ+لہ}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{جہ\,لہ}{ث}$ ہوگی۔

ثابت کرو کہ جو ذوار بعتہ الاضلاع اس طرح ڈوبا ہوا ہو اس کے مرکز ثقل کی گہرائی اور دباؤ کے مرکز کی گہرائی کی باہمی نسبت ۲ : ۳ نہیں ہو سکتی۔

۱۱ — ذوار بعتہ الاضلاع کی شکل کا ایک رقبہ پانی کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اس کے کونوں کی گہرائیاں بالترتیب عہ، بہ، جہ، لہ ہیں، ثابت کرو کہ اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{عہ+بہ+جہ+لہ}{2} - \frac{بہ\,جہ + جہ\,عہ + عہ\,بہ + عہ\,لہ + بہ\,لہ + جہ\,لہ}{6ث}$$

ہوگی جہاں ث مرکز ثقل کی گہرائی ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ایک ذوار بعتہ الاضلاع ہے جس کے کونے ا، ب، ج، د بالترتیب عہ، بہ، جہ، لہ گہرائی پر ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج اور ب ج د کے رقبے بالترتیب لا ، ما ہیں، تب چونکہ ا ب د اور ب ج د کے ثقلی مرکزوں کی گہرائیاں بالترتیب

$$\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ}}{۳} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۳}$$

ہیں اسلئے

$$\text{ف} = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{\text{لا} \times (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ}) + \text{ما} (\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ})}{\text{لا} + \text{ما}} \quad \ldots (۱)$$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ} - ۳\text{ف}} = - \frac{\text{ما}}{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ} - ۳\text{ف}} \quad \ldots (۲)$$

اب مثلثوں ا ب ج اور ب ج د پر کے مجموعی دباؤ

$$\text{لا} \times \frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ}}{۳} \times \text{وٖ} \quad \text{اور} \quad \text{ما} \times \frac{\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۳} \times \text{وٖ} \quad \text{ہیں}$$

اور ان پر جو دباؤ عمل کرتے ہیں اُن کے مرکزوں کی گہرائیاں دفعہ ۱۶۲ کے نتیجہ صریح کی رُو سے

$$\frac{\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{لہ}^۲ + \text{عہ بہ} + \text{عہ لہ} + \text{بہ لہ}}{۲ (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ})} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ + \text{لہ}^۲ + \text{بہ لہ} + \text{جہ لہ} + \text{بہ جہ}}{۲ (\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ})} \quad \text{ہیں}$$

اس لئے اگر دباؤ کے مطلوبہ مرکز کی گہرائی لاَ ہو تو

$$\bar{\text{لا}} \times \left[\text{لا وٖ} \frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{لہ}}{۳} + \text{ما وٖ} \frac{\text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۳} \right]$$

$$= \frac{\text{وٖ}}{۶} \left[\text{لا} (\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{لہ}^۲ + \text{عہ بہ} + \text{عہ لہ} + \text{بہ لہ}) + \text{ما} (\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ + \text{لہ}^۲ + \text{بہ جہ} + \text{جہ لہ} + \text{لہ بہ}) \right]$$

یعنی مساوات (۱) سے

$$\text{لآ} = \frac{1}{4} + \frac{\text{لا}(\text{عہ}^2+\text{بہ}^2+\text{لہ}^2+\text{عہ بہ}+\text{عہ لہ}+\text{بہ لہ}) + \text{ما}(\text{بہ}^2+\text{جہ}^2+\text{لہ}^2+\text{بہ جہ}+\text{لہ جہ}+\text{لہ بہ})}{(\text{لا}+\text{ما})\,\text{ف}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\left\{(\text{بہ}+\text{جہ}+\text{لہ}-3\,\text{ف})(\text{عہ}^2+\text{بہ}^2+\text{لہ}^2+\text{عہ بہ}+\text{عہ لہ}+\text{بہ لہ}) - (\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}-3\,\text{ف})(\text{بہ}^2+\text{جہ}^2+\text{لہ}^2+\text{بہ جہ}+\text{جہ لہ}+\text{لہ بہ})\right\}}{\text{ف}\,(\text{جہ}-\text{عہ})}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(\text{عہ}-\text{جہ})(\text{عہ بہ}+\text{عہ جہ}+\text{عہ لہ}+\text{بہ جہ}+\text{بہ لہ}+\text{جہ لہ}) + 3\,\text{ف}\,(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}+\text{لہ})}{\text{ف}\,(\text{جہ}-\text{عہ})}$$

جو اختصار کرنے سے $= \frac{\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}+\text{لہ}}{4} \quad \frac{\text{عہ بہ}+\text{عہ جہ}+\text{عہ لہ}+\text{بہ جہ}+\text{بہ لہ}+\text{جہ لہ}}{6\,\text{ف}}$

۱۲ — ایک مربع جسکا ہر ضلع ۲ ا ہے پانی کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اسکی سطح انتصابی ہے لیکن کوئی ضلع انتصابی نہیں - اگر مربع کے ہندسی مرکز کی گہرائی نوتر سطح کے نیچے ک ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز ہندسی مرکز سے فاصلہ $\frac{\text{ا}^2}{3\,\text{ک}}$ پر انتصاباً نیچے واقع ہوگا۔

۱۳ — ایک مربع جزوی طور پر ایک مائع کے اندر اس طرح غرق ہے کہ اسکا مرکز مائع کی سطح میں ہے، ثابت کرو کہ ڈوبے ہوئے حصہ پر کے دباؤ کا مرکز ہندسی مرکز سے انتصاباً نیچے واقع ہوگا۔

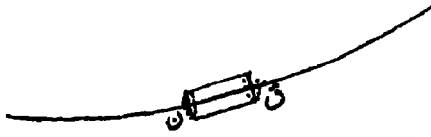
باب دہم

گھومنے والے مائعات

۱۶۴ ۔ مساوی دباؤ کی سطح سے وہ سطح مراد ہوتی ہے جس کے سب نقطوں پر کے دباؤ باہم مساوی ہوں ۔

ثابت کرو کہ ایک ساکن سیال یا ایک حرکت کرنے والے کامل سیال کے کسی نقطہ پر کا حاصل مجموعی دباؤ اس مساوی دباؤ کی سطح پر عمود وار ہوتا ہے جو اُس نقطہ میں سے گزرتی ہے ۔

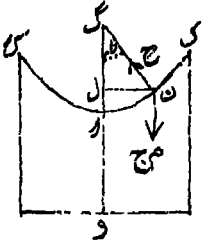
سیال کے کسی نقطہ ن پر غور کرو اور اِن میں سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح پر ایک چھوٹا طول ن ق لو ۔

ایک لانہایت پتلے اسطوانہ پر غور کرو جس کا محور ن ق ہے اسکے سروں ن اور ق پر کے دباؤ مساوی ہیں کیونکہ ان سروں کے رقبے ایک ہی ہیں اور ن اور ق مساوی دباؤ کی سطح پر واقع ہیں ۔

پس اسطوانہ پر کا حاصل مجموعی دباؤ ن ق پر عمود وار ہوگا ۔

اسی طرح سے یہ کسی اور مستقیم خط پر بھی عمود وار ہوگا جو ن میں سے مساوی دباؤ کی سطح میں کھینچا جائے ۔

لہذا یہ اس سطح پر بھی عمود وار ہوگا۔

۱۶۵ — اگر ایک ظرف اور اس کے اندر کا مائع یکساں رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھومے تو ثابت کرو کہ مائع کی آزاد سطح ایک مکافی نما ہوگی (مکافی نما سے مراد وہ سطح ہے جو قطع مکافی کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہو)

فرض کرو کہ مائع کو گھمانے سے اس کی سطح جو شکل اختیار کرتی ہے وہ ایسی ہے جو منحنی ا ن ک کو گردش کے محور و ا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ مائع کی یکساں زاوی رفتار سہ ہے۔

سیال کی سطح کے کسی نقطہ ن پر جو سیال ہے اس کے ایک چھوٹے جزو پر غور کرو اور منحنی پر عماد ن گ نکالو۔ تب اس چھوٹے جزو پر سیال کا جو مجموعی دباؤ عمل کرتا ہے اس کی سمت ن گ ہے۔

[کیونکہ منحنی ا ن ک جس سطح کی تکوین کرتا ہے وہ ہوا سے مس کرتی ہے اور ہوا کا دباؤ مستقل ہے۔ اس لئے ا ن ک، ن میں سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح کی تکوین کرتا ہے، لہذا دفعہ ماقبل کی رو سے حاصل مجموعی دباؤ کی سمت سطح پر عمود وار ہے]

اس جزو پر صرف ایک اور قوت جو م ج کے مساوی ہے انتصاباً نیچے کی طرف عمل کرتی ہے جہاں م اس جزو کی کمیت ہے اور ج جاذبہ ارض۔

محور اگ پر عمود ن ل کھینچو۔

تب ن زاوی رفتار سد کے ساتھ ایک دائرہ بناتا ہے جسکا نصف قطر ل ن ہے -

پس علم حرکت دفعہ ۱۳۵ سے ظاہر ہے کہ اس پر ضرور ایک اور قوت م س^۲ × ن ل، ن ل کی سمت میں عمل کرتی ہے -

یہ قوت لازماً دو قوتوں ح اور م ج کا حاصل ہے
انتصابی اور افقی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

ح جم ط - م ج = ...(۱)

ح جب ط = م س^۲ × ن ل ..... (۲)

جہاں ط سے مراد زاویہ ل گ ن ہے

∴ مس ط = س^۲ × ن ل / ج

یعنی ج / س^۲ = ن ل × مم ط = ل گ

پس منحنی ا ن ایسا ہے کہ زیر عماد ن گ مستقل ہے اور یہ خاصیت صرف قطع مکافی میں پائی جاتی ہے جس میں زیر عماد وتر خاص کے نصف کے مساوی ہوتا ہے -

[یہاں یہ بھی بتایا جا سکتا ہے کہ کوئی اور منحنی یہ خاصیت نہیں رکھتا لیکن ثبوت کے لیۓ احصائے تکملات سے کام لینا پڑے گا]

پس منحنی ا ن ایک قطع مکافی ہے جس کا وتر خاص ۲ج / س^۲ ہے اور جسکا محور گردش کا محور ہے -

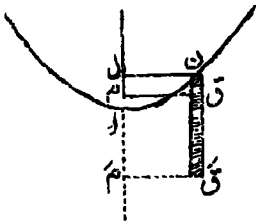
لہٰذا مائع کی سطح جو منحنی کو انتصابی خط کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے وہ ایک مکافی نما ہے -

نتیجہ صریح ۔ قطع مکافی کے اساسی خواص سے ظاہر ہے کہ

ن ل' = وتر خاص × ا ل = ہج/سہ۲ × ا ل

اور یہ ربط اُن تمام نقطوں کے لئے جو سطح پر واقع ہوں درست ہے۔

۱۶۶ ۔ گھومنے والے مائع کے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مائع کے اندر کوئی نقطہ

ق ہے، ایک خط مستقیم ق ن انتصابی سمت میں اوپر کی طرف کھینچو اور فرض کرو کہ یہ سطح سے ن پر ملتا ہے، ن ق کو محور مان کر ایک بہت پتلا مستدیر اسطوانہ بناؤ جس کی تراش کا رقبہ ع ہو، گردش کے محور ا م ل پر عمود ن ل، ق م نکالو۔

اگر اس مائع کا دباؤ جو ق پر ہے د ہو تو چھوٹے اسطوانہ ن ق پر جو انتصابی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ یہ ہیں: قوت د ع جو ق میں سے انتصابی سمت میں اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اور اسطوانہ کا وزن ج ک × ع × ق ن جو انتصاباً نیچے کی طرف عمل کرتا ہے جہاں ک مائع کی کثافت ہے۔

چونکہ گردش یکساں اور مسلسل ہے اس لئے اسطوانہ ق ن میں کوئی انتصابی اسراع نہیں ہے، پس اس پر کی انتصابی قوتیں باہم متعادل ہیں۔ لہذا

د ع - ج ک × ع × ق ن = ۰

∴ د = ج ک × ق ن = ج ک × م ل

= ج ک (ا ل - ا م)

لیکن دفعہ ۱۶۵ کی رُو سے

ن ل۲ = ج۲/سہ۲ × ا ل

∴ د = ج ک (سہ۲/ج۲ × ن ل۲ - ا م)

= ک (۱/۲ سہ۲ × ق م۲ - ج × ا م)

اگر ق، ا سے نیچے ہو جیسے قَ پر تو

مَ ل = مَ ا + ا ل

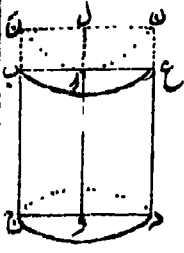
اور دباؤ = ک (۱/۲ سہ۲ × ق م۲ + ج × ا مَ)

نتیجہ صریح ۱ — دفعہ ما قبل میں ہم نے ہوا کے دباؤ کو نظر انداز کردیا ہے، اگر اس کو بھی محسوب کیا جائے اور ۲ سے تعبیر کیا جائے تو ہمیں ن پر مزید انتصابی دباؤ ۲ × عہ حاصل ہوگا اور دفعہ ما قبل میں د کی جو قیمت ہے اس میں ۲ کا اور اضافہ کرنا پڑیگا۔

نتیجہ صریح ۲ — اگر منحنی ا ن پر کے ہر نقطہ سے انتصاباً نیچے کی طرف خطوط مستقیم کھینچے جائیں اور یہ خط مستقیم ن ق کے مساوی ہوں تو ان خطوں کے سرے ایک ایسے منحنی پر واقع ہونگے جو شکل اور قامت کے لحاظ سے منحنی ا ن کے مساوی ہوگا۔ پس مساوی دباؤں کی سطحیں مساوی مکافی نما ہوتی ہیں۔

۱۶۷ مشق ا۔ ایک مستدیر اسطوانہ جس کی چوٹی بند ہے قریب قریب پورا ایک مائع سے بھر لیا ہے اور اسطوانہ مع اپنے اندر کے پانی کے انتصابی محور کے گرد

یکساں زاویی رفتار سے گھوم رہا ہے، اسطوانہ کے پیندے اور چوٹی پر تمام
کے جو مجموعی دباؤ ہیں اُن کو معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کے محور ا د میں سے گزرنیوالی
ایک مستوی سطح سے اسطوانہ کی جو تراشش حاصل ہوتی ہے
وہ ب ج د ع ہے۔

فرض کرو کہ ا د = ف اور قاعدہ کا نصف قطر و د = ر

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ اسطوانہ قریب قریب پورا مائع سے
بھرا ہوا ہے تو ہمارا مفہوم یہ ہوتا ہے کہ گھومنے سے پہلے
اسطوانہ کی چوٹی ب ا ع پر کا دباؤ عین صفر کے مساوی ہے۔

جب مائع گھوم رہا ہو تو ظاہر ہے کہ سب سے کم دباؤ ا پر ہوگا یعنی وہاں
دباؤ اب بھی صفر ہی ہوگا۔

ایک قطع مکافی ن ا نَ کھینچو جس کے محور کی سمت و ا ہو اور وترخاص
$\frac{2ج}{ω^2}$ ہو۔

تب مائع کے کسی نقطہ پر جو دباؤ ہوگا وہ اس سطح کے نیچے جو قطع مکافی کے
گھومنے سے پیدا ہوتی ہے اس نقطہ کی انتصابی گہرائی کی وجہ سے ہوگا۔

(۱) پس قاعدہ ج د پر کا مجموعی دباؤ

= اس مائع کا وزن جو ج د اور قطع مکافی کی درمیانی جگہ
میں بھرا جا سکتا ہے۔

= اسطوانہ ن ج کا وزن - مکافی نما ن ا نَ کا وزن

= اسطوانہ ن ج کا وزن - $\frac{1}{2}$ اسطوانہ ن ب کا وزن

$= ج ک × π ر^2 × د ن - \frac{1}{2} ج ک × π ر^2 × ع ن$

اب ن ل^۲ = $\frac{۲ج}{سہ^۲}$ × ا ل یعنی ا ل = $\frac{سہ^۲}{۲ج}$ × ر^۲

اس لئے ج د پر کا مجموعی دباؤ

= ج ک × ۲۲ ر^۲ [د ن - $\frac{۱}{۲}$ ع ن] = ۲۲ ج ک × ر^۲ [ف + $\frac{۱}{۲}$ ع ن]

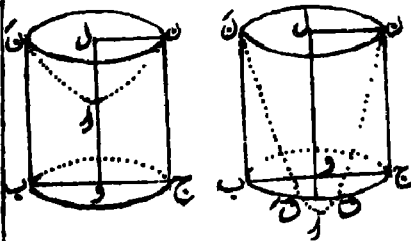
= ۲۲ ج ک ر^۲ [ف + $\frac{۱}{۲}$ ا ل] = ۲۲ ک ر^۲ [ج ف + $\frac{سہ^۲ ر^۲}{۴}$]

(۲) نیز ب ع پر کا مجموعی دباؤ اوپر کی طرف عمل کرتا ہے اور مقدار میں اس مائع کے وزن کے مساوی ہے جو ب ع اور مکافی نما کی درمیانی جگہ میں بھرا جا سکتا ہے، اس لئے

= اسطوانہ ن ب کا وزن - مکافی نما ن ا نَ کا وزن

= $\frac{۱}{۲}$ ن ب کا وزن = ج ک × $\frac{۱}{۲}$ ۲۲ ر^۲ × ا ل

= $\frac{۱}{۴}$ ۲۲ ک ر^۴ سہ^۲

مشق ۲ — ایک مستدیر اسطوانہ کو جسکا ارتفاع ف ہے اور جس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے ایک مائع سے بھرا گیا ہے، اسطوانہ اور اندر کا مائع محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھومتے ہیں۔ معلوم کرو کہ کتنا مائع گر جائیگا۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی اسطوانہ کو خط نَ ب ج ن پر کاٹتی ہے اور اسطوانہ کا محور ل ا و ہے۔ آزاد سطح ایک قطع مکافی ہے جسکا وتر خاص $\frac{۲ج}{سہ^۲}$ ہے، یہ سطح لازماً ن اور نَ میں سے گزرے گی۔

لہٰذا یہ ایک قطع مکافی ہے جس کا راس ا پر ہے جہاں ن ل^۲ = $\frac{۲ج}{سہ^۲}$ ا ل

یعنی $\text{ال} = \frac{\text{سہ}^2}{2\text{ج}} \times \text{ن ل}'^2 = \frac{\text{سہ}^2}{2\text{ج}}\text{ر}^2$

(۱) فرض کرو کہ $\frac{\text{سہ}^2}{2\text{ج}}\text{ر}^2 > \text{ف}$ ، اسلئے $\text{سہ} > \frac{\sqrt{2\text{ج ف}}}{\text{ر}}$

اس لئے صورت اول میں ا' و سے اوپر ہوگا -

جو مائع گرجائیگا اُس کی مقدار اتنی ہے جتنی مکافی نما ن ا نَ کو بھردے اسلئے اس کا حجم

= اس اسطوانہ کا نصف حجم جس کا قاعدہ ن نَ ہے اور ارتفاع ل ا ہے

$= \frac{1}{2}\pi\text{ر}^2 \times \text{ل ا} = \frac{1}{2}\pi\text{ر}^2 \times \frac{\text{سہ}^2}{2\text{ج}}\text{ر}^2$

$= \frac{1}{4}\,\frac{\pi\,\text{سہ}^2\text{ر}^4}{\text{ج}}$

(۲) اگر $\frac{\text{سہ}^2\text{ر}^2}{2\text{ج}} = \text{ف}$ ، تب ل ا = ل و اور مکافی کا راس ا محور کے سب سے نچلے نقطہ و پر منطبق ہوتا ہے -

(۳) $\frac{\text{سہ}^2\text{ر}^2}{2\text{ج}} > \text{ف}$ تب ل ا > ل و اور نقطہ ا' و سے نیچے چلا جاتا ہے جیسا کہ صورت دوم میں، اس صورت میں قطع مکافی ب ج سے نقاط ق ، قَ پر ملتا ہے اور

$$\text{ق و}'^2 = \frac{2\text{ج}}{\text{سہ}^2} \times \text{ا و} = \frac{2\text{ج}}{\text{سہ}^2}\left[\text{ا ل} - \text{ف}\right]$$

$$= \frac{2\text{ج}}{\text{سہ}^2}\left[\frac{\text{سہ}^2\text{ر}^2}{2\text{ج}} - \text{ف}\right] = \text{ر}^2 - \frac{2\text{ج ف}}{\text{سہ}^2}$$

اس صورت میں جو پانی گرجائے گا اس کا حجم

= ن ق قَ نَ کا حجم

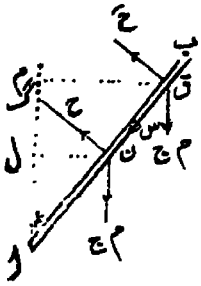
= مکافی نما ا ن نَ - مکافی نما ا ق قَ

$$= \frac{1}{2}\pi\,\text{ل ن}^2 \times \text{ا ل} - \frac{1}{2}\pi\,\text{ق د}^2 \times \text{ا د}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\,\text{ر}^2 \times \frac{\text{سہ}^2\text{ر}^2}{2\text{ج}} - \frac{1}{2}\pi\left(\text{ر}^2 - \frac{2\text{ج ف}}{\text{سہ}^2}\right)\left(\frac{\text{سہ}^2\text{ر}^2}{2\text{ج}} - \text{ف}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\pi\,\text{سہ}^2\text{ر}^4}{\text{ج}} - \frac{\pi\,\text{سہ}^2}{4\text{ج}}\left(\text{ر}^2 - \frac{2\text{ج ف}}{\text{سہ}^2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi\,\text{سہ}^2}{4\text{ج}}\left[\frac{4\text{ج ف ر}^2}{\text{سہ}^2} - \frac{4\text{ج}^2\text{ف}^2}{\text{سہ}^4}\right] = \frac{\pi\,\text{ف}}{\text{سہ}^2}\left[\text{سہ}^2\text{ر}^2 - \text{ج ف}\right]$$

مشق ۳۴ - ایک پتلی یکساں تراش کی سیدھی نلی ا ب اپنے نچلے سرے ا میں سے گزرنیوالے انتصابی محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے حرکت کر رہی ہے، اگر دوسرا سرا ب کھلا ہو تو بتاؤ کہ اس میں سے کتنا مائع باہر نکل جائیگا -

جب مائع اضافی توازن میں گھوم رہا ہو تو فرض کرو کہ اس کا سب سے اونچا نقطہ ن ہے، تب اس جگہ مائع کا دباؤ صریحاً صفر ہوگا -

ن پر جو سیال ہے اُس کی ایک پتلی تراش کے توازن پر غور کرو جس کی کمیّت م ہے، اس پر اس کا وزن جوم ج - کہ ... دی ہے عین نیچے کی طرف عمل کرتا ہے نیز نلی کا تعامل ح ہے جو نلی کی سمت پر عمود وار ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، یہ دونوں قوتیں نلی میں عادی اسراع م سہ² × ن ل پیدا کرتی ہیں جہاں ن ل گردش کے محور پر عمود ہے انتصابی اور افقی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

$$\text{ح جم}\,\alpha = \text{م سہ}^2 \times \text{ن ل} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ح جب عہ = م ج .... (۲)

جہاں عہ انتصابی خط کے ساتھ نلی کا زاویہ میلان ہے

لہٰذا تقسیم کرنے سے

(سہ² × ن ل) / ج = مم عہ یعنی ن ل = (ج / سہ²) مم عہ .....(۳)

∴ ان = ن ل / جب عہ = ج / سہ² × جم عہ / جب² عہ

اس سے مائع کے بالاترین نقطہ کا مقام معلوم ہوتا ہے۔

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ ن کے اوپر کا سیال نکل جائے گا۔

اگر ن کے اوپر کوئی سیال ہو تو فرض کرو کہ اس کا سب سے اونچا نقطہ ق ہے، و ل پر عمود ق م کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا طول ل ن + ک ہے

فرض کرو کہ اس کو توازن میں رکھنے کے لئے عادی قوت ح کے علاوہ و کی سمت میں ایک اور قوت س عمل کرتی ہے، تب

ح جم عہ + س جب عہ = م سہ² × م ق

= م سہ² × ن ل + م سہ² ک .....(۴)

اور ح جب عہ − س جم عہ = م ج .... (۵)

ح کو ساقط کرنے سے

س = (م سہ² × ن ل + م سہ² ک) جب عہ − م ج جم عہ

= م ج جم عہ + م سہ² ک جب عہ − م ج جم عہ ...

... (مساوات (۳) سے

= م سہ² ک جب عہ

لہٰذا س مثبت ہے، اس لئے ہمارا مفروضہ صحیح ہے گویا سیال کو ق پر قائم رکھنے کے لئے ضرور ہے کہ اس کو ا کی طرف کھینچا جائے، لیکن چونکہ یہ کھینچا نہیں جاسکتا اس لئے یہ اوپر کی طرف حرکت کریگا۔ اور ب میں سے باہر نکل جائے گا۔

ن کے اوپر جسقدر سیال ہے اُس کے ہر جزو کی یہی کیفیت ہے۔

مشق ۴۔ نصف دائرہ کی شکل کی ایک نلی پانی سے بھری گئی ہے اور اس قطر کے گرد جو اس کے دونوں سروں کو وصل کرتا ہے گھوم رہی ہے، بتاؤ کہ نلی میں کس جگہ سوراخ کیا جائے کہ اس میں سے اندر کا تمام پانی نکل جائے۔

سوراخ جہاں کہیں بھی کیا جائے کچھ نہ کچھ سیال نکل جائیگا، لیکن تمام سیال اس سوراخ میں سے نہیں نکل سکتا تا وقتیکہ سوراخ ایسے مقام پر نہ کیا جائے جس پر مائع کا آخری قطرہ ہوگا یعنی تا وقتیکہ سوراخ ایک ایسے مقام ن پر نہ کیا جائے جس پر کہ مائع کا ایک ذرہ واحد اضافی توازن کی حالت میں قائم رہ سکتا ہے۔

اگر مرکز د ہو اور ب د ا انتصابی قطر ہو اور ن ل، ب ا پر عمود ہو تو فرض کرو کہ ن پر کمیت م کا ایک ذرہ اپنے وزن م ج کے اور ن د کی سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت ح کے زیر عمل اضافی توازن کی حالت میں ہے۔ ج جاذبہ ارض کو تعبیر کرتا ہے۔

تب ان دو قوتوں کا حاصل م ععہ^2 ن ل ہوگا اور ن ل کی سمت

میں عمل کریگا۔

پس اگر زاویہ ل د ن = طہ تو افقی اور انتصابی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

ح جب طہ = م سہ۲ ن ل

ح جم طہ = م ج

∴ مس طہ = (سہ۲ / ج) × ن ل

∴ د ل = ن ل × مم طہ = ج / سہ۲

اس سے د کے نیچے مطلوبہ نقطہ ن کا انتصابی فاصلہ معلوم ہو جاتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲

۱۔ ایک بند قائم، مستدیر اسطوانہ کو قریب قریب پانی سے بھر کر انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے، اگر وہ مجموعی دباؤ جو گھومتے وقت قاعدہ پر عمل کرتا ہے اس مجموعی دباؤ کا نصف ہو جو بحالت سکون قاعدہ پر عمل کرتا ہے تو گردش کی زاوی رفتار دریافت کرو۔

۲۔ ایک بند مستدیر اسطوانہ کو عین پانی سے بھرا گیا ہے، اسطوانہ اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھوم رہا ہے، اگر پیندے پر کا مجموعی دباؤ چوٹی پر کے مجموعی دباؤ کا پانچ گنا ہو تو بتاؤ کہ زاوی رفتار [illegible] / ر ہے جہاں ف اسطوانہ کا ارتفاع ہے اور ر اس کا نصف قطر ہے۔

۳۔ گزشتہ مشق میں اگر ایک مجموعی دباؤ دوسرے مجموعی دباؤ کا ن گنا ہو تو زاوی رفتار (۲/ر) √(ج ف / (ن − ۱)) ہوگی۔

۴ ۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ کو جس کی چوٹی کھلی ہے پانی سے بھرا گیا ہے، اسطوانہ مع پانی کے اپنے محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے، اگر آدھے سے زیادہ پانی نہ گرے تو قاعدہ کے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۵ ۔ ایک مجوف مخروط جو قریب قریب پانی سے بھرا ہوا ہے اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے یکساں زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے اور اس کا راس اوپر کی طرف ہے، اگر اس کے قاعدہ پر کا دباؤ اندر کے پانی کے وزن کا چھ گنا ہو تو ثابت کرو کہ زاوی رفتار $\sqrt{\frac{۲ج}{ا}\ \text{مم عہ}}$ ہے جہاں ا اس کے قاعدہ کا نصف قطر ہے اور ۲ عہ مخروط کا راسی زاویہ ہے۔

۶ ۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف کو آدھا پانی سے بھر کر اس کے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھمایا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اسطوانہ کس بڑی سے بڑی زاوی رفتار سے گھوم سکتا ہے کہ پانی باہر نہ گرے، نیز ثابت کرو کہ تب قاعدہ کے مرکز کے اوپر پانی نہیں ہوگا۔

۷ ۔ ایک اسطوانہ کو جس کا نصف قطر ا ہے پانی سے عین بھر کر ایک ایسے بھاری ڈھکنے سے بند کر دیا گیا ہے جو اپنے کنارے کے ایک نقطہ کے گرد گھوم سکتا ہے، ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ اور اس کا پانی اسطوانہ کے محور کے گرد زاوی رفتار سہ سے گردش کریں تو ڈھکنا اوپر اٹھ جائیگا اگر اس کا وزن $\frac{\pi}{4}$ سہ^{2} ا^{4} ک سے کم ہو جہاں ک پانی کی کثافت ہے۔

۸ ۔ ایک اسطوانہ جس کی چوٹی کھلی ہے ایک سیال سے آدھا بھرا ہوا ہے جب یہ اسطوانہ اپنے انتصابی محور کے گرد زاوی رفتار سہ سے گھومے تو سیال عین اوپر کے کنارے تک پہنچ جاتا ہے، ثابت کرو کہ اگر

سیال کا $\frac{۱}{\text{ن}}$ واں حصہ اسطوانہ کے اندر ہے تو زاوی رفتار سہ $\sqrt{\text{ن}}$ ہوگی۔

۹۔ دائرہ کی شکل کی ایک نلی ایک سیال سے آدھی بھری گئی ہے اور اس کو ایک انتصابی مماس کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، اگر نلی کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ اس قطر کا میلان جو مائع کی آزاد سطحوں میں سے گزرتا ہے افق کے ساتھ $\text{مس}^{-1}\frac{\text{سہ}^{۲}\text{ا}}{\text{ج}}$ ہوگا۔

۱۰۔ ایک پتلی نلی دائرہ کی شکل کی ہے جسکا نصف قطر ا ہے، نلی کے ایک چوتھائی کو پانی سے بھرکر اس کے انتصابی قطر کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، اگر پانی کا سب سے اونچا نقطہ نلی کے سب سے اونچے نقطہ سے زاوی فاصلہ °۶۰ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{سہ}^{۲} = \frac{\text{۲ج}}{\text{ا}}\left(\sqrt{۳}+۱\right)$$

۱۱۔ دائرہ کی شکل کی ایک انتصابی نلی کے اندر جو اپنے انتصابی قطر کے گرد گھوم سکتی ہے کچھ سیال ہے، سیال کے محاذی مرکز پر زاویہ ط بناتا ہے ثابت کرو کہ کم سے کم زاوی رفتار جو سیال کو دو حصوں میں تقسیم کردے

$$\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{قط}\,\frac{\text{ط}}{۴}}\ \text{ہے}$$

۱۲۔ دائرہ کی شکل کی ایک پتلی نلی کا نصف قطر ا ہے، اس کے اندر کچھ وزنی سیال ہے جو نلی کے ایک چوتھائی حصہ کو بھرے ہوئے ہے۔ نلی کو اس کے انتصابی محور کے گرد زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، اگر $\text{سہ}^{۲} = \frac{\text{۲ج}\sqrt{۲}}{\text{ا}}$ تو ثابت کرو کہ سیال کی سطح عین افقی قطر تک اوپر اٹھ آئے گی اور آزاد سطح کی انتصابی گہرائی مرکز کے نیچے $\frac{\text{ا}}{\sqrt{۲}}$ ہوجائیگی

۱۳ — پتلے سوراخ والی ایک نلی دائرہ کی شکل کی ہے جسکا نصف قطر ا ہے، نلی کے اندر کچھ مائع ہے جسکے محاذی مرکز پر ۶۰° کا زاویہ بنتا ہے - اگر نلی کو اس کے انتصابی قطر کے گرد زاوی رفتار $۲\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ سے گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ مائع کا سب سے اونچا نقطہ عین افقی قطر کے ایک سرے تک پہنچ جائے گا اور کل پانی انتصابی قطر کے ایک طرف آجائیگا۔

۱۴ — چھوٹی تراش کی ایک نلی ایک مربع کے تین اضلاع کی شکل کی ہے درمیانی ضلع افق کے متوازی ہے، اس کو پانی سے بھر کر اُس انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے جو افقی ضلع کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ پانی باہر نہیں نکلیگا تاوقتیکہ سہ بڑا نہ ہو $\sqrt{\frac{8ج}{ا}}$ سے اور اگر یہ بڑا ہو تو جو پانی باہر نکل جائے گا وہ نلی کا طول $۳ا - \frac{8ج}{سہ^2 ا}$ بھرنے کے کافی ہوگا جہاں ا مربع کے ایک ضلع کا طول ہے۔

۱۵ — مشق ماقبل میں اگر نلی اپنے ایک انتصابی ضلع کے گرد گھومے تو جو پانی باہر گر جائیگا وہ طول $\frac{سہ^2 ا^2}{۲ج}$ کو بھرنے کے لیے کافی ہوگا اگر $سہ < \sqrt{\frac{۲ج}{ا}}$ ہے اور طول $ا + \sqrt{ا^2 - \frac{۲ج ا}{سہ^2}}$ کو بھرنے کے لیے کافی ہوگا اگر $سہ > \sqrt{\frac{۲ج}{ا}}$ ہے۔

۱۶ — ایک اسطوانہ کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف، اس کے اندر گہرائی ب تک ایک سیال پڑا ہے۔ اور اسطوانہ معہ سیال اپنے انتصابی محور کے گرد اس طرح گھوم رہا ہے، کہ سیال باہر نہیں گرتا، ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی زاوی رفتار $\frac{۲}{ا}\sqrt{ج(ف - ب)}$ یا $\frac{ف}{ا}\sqrt{\frac{ج}{۲ب}}$ ہو سکتی ہے اگر بالترتیب

$$ب \lessgtr \frac{1}{2} ف \text{ ہے}$$

۱۷ — ایک مکعب صندوق کا قاعدہ افق کے متوازی ہے اور اس کی چوٹی کھلی ہے، صندوق کو پانی سے بھر کر اسکے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، اگر قاعدہ کے مرکز پر سے پانی عین ہٹ جائے تو ثابت کرو کہ زاویی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۸ ج}}{\text{ا}}}$ ہے جہاں ا صندوق کے ایک ضلع کا طول ہے۔

۱۸ — مخروط کی شکل کے ایک ظرف کا رأسی زاویہ ۲ عہ ہے اور ارتفاع ف ہے، ظرف کے اندر پانی ہے جس کا حجم ظرف کے حجم کا نصف ہے۔ اگر ظرف مع پانی کے یکساں زاویی رفتار سہ سے گھومے اور پانی باہر نہ نکلے تو ثابت کرو کہ سہ کبھی $\sqrt{\frac{\text{۲ ج}}{\text{۳ ف}}}$ مم عہ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

۱۹ — نصف کرہ کی شکل کا ایک پیالہ ہے جسکا نصف قطر ا ہے، پیالہ کو ایک مائع سے بھر کر اس کے انتصابی نصف قطر کے گرد یکساں زاویی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، بتاؤ کہ کتنا سیال باہر نکل جائیگا۔

۲۰ — ایک برتن قائم مخروط کی شکل کا ہے جسکا رأس نیچے کی طرف ہے۔ برتن کو مائع سے بھر کر اس کے محور کے گرد یکساں زاویی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، اگر مخروط کا ارتفاع ف ہو اور رأسی زاویہ ۲ عہ ہو تو ثابت کرو کہ جو مائع گر جائے گا اس کی مقدار $\frac{1}{4}\,\frac{\text{۳ سہ}^{2}\,\text{ف}^{4}}{\text{ج}}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ}$ ہوگی بشرطیکہ سہ $>$ $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ف}}}$ مم عہ

۲۱ — ایک برتن کی شکل ایک ایسے گردشی مکافی نما کی ہے جو ۴ ا والے وتر خاص کے ایک قطع مکافی کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ برتن کو اس کی نصف بلندی تک کسی مائع سے بھرا گیا ہے۔ بتاؤ کہ یہ کس بڑی سے بڑی زاویی رفتار سے اپنے محور کے گرد گھوم سکتا ہے کہ مائع

باہر نہ گرے۔

۲۲ — ایک قطع مکافی کو اسکے محور کے گرد گھمانے سے ایک پیالہ تیار کیا گیا ہے پیالہ کو کسی مائع سے بھر کر اس کے محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، اگر قطع مکافی کا وتر خاص $< \frac{\text{۲ج}}{\text{سہ}^{۲}}$ تو ثابت کرو کہ پیالہ کے سب سے نچلے نقطہ پر کے ایک سوراخ میں سے سب مائع نکل جائیگا۔

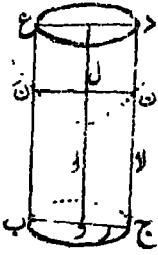
۲۳ — ایک نصف کروی پیالہ کو پانی سے عین بھرا گیا ہے اور اس کو اُلٹا کر کے ایک چکنی افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ پانی پیالہ اور میز کے درمیان میں سے نکلنے نہیں پاتا اگر پیالہ اور اس کے پانی کو پیالہ کے محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا جائے اور پیالہ میز کی سطح سے عین اوپر اُٹھنے کو ہو تو ثابت کرو کہ پیالہ کے وزن کو پانی کے وزن کے ساتھ نسبت

$$\text{۴ ج} + \text{۳ سہ}^{۲}\,\text{ا} : \text{۸ ج ہے}$$

۲۴ — ایک گردشی مکافی نما کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹ کر جو اسکے محور پر عمود وار ہے ایک پیالہ بنایا گیا ہے، اس کو سیال سے عین بھر کر ایک افقی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا رأس اوپر کی طرف ہے اور پھر اسے مع سیال کے محور کے گرد گھمایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مائع نکل جائیگا اگر زاوی رفتار م $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۴ا}} \times \frac{\text{و} - \text{و}_{۱}}{\text{و}_{۱}}}$ سے زیادہ ہو جہاں و اور و۱ بالترتیب پیالہ اور مائع کے اوزان ہیں اور ۴ ا قطع مکافی کا وتر خاص ہے۔

۲۵ — ایک مستدیر اسطوانہ جس کا نصف قطر ر ہے پانی کے اندر اس طرح آزادانہ تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، پانی پہلے ساکن ہے اور پھر اس کو اُس محور کے گرد جو اسطوانہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے یکساں

رفتار سہ سے گھمایا جاتا ہے، ثابت کرو کہ مؤخر الذکر صورت میں اسطوانہ کی سطح کا مزید $\frac{\text{سہ}^2\,\text{ر}^2}{4\,\text{ج}}$ طول بھیگ جائیگا۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع ف ہے اس کی کثافت ک_1 ہے اور پانی کی کثافت ک_2 ہے، تب پہلی صورت میں $\frac{\text{ک}_1}{\text{ک}_2}\,\text{ف}$ ارتفاع بھیگا ہوا ہے۔

دوسری صورت میں فرض کرو کہ اسطوانہ پانی کی سطح سے جس دائرہ پر ملتا ہے اُس کا نصف قطر ل ن ہے۔

اگر ہم ن اور نَ میں سے ایک قطع مکافی ن ا نَ کھینچیں جس کا وتر خاص $\frac{2\,\text{ج}}{\text{سہ}^2}$ ہو اور جسکا محور اسطوانہ کا محور ہو تو قطع مکافی آزاد سطح کی ایک تراش ہوگی۔

$$\text{تب ن ل}^2 = \frac{2\,\text{ج}}{\text{سہ}^2} \times \text{ا ل}\quad \text{یعنی ا ل} = \frac{\text{سہ}^2\,\text{ر}^2}{2\,\text{ج}}$$

اگر اسطوانہ کی اس سطح کا طول ج ن جو اب پانی سے مس کرتی ہے لا ہو تو

$$\pi\,\text{ر}^2\,\text{ف} \times \text{ک}_1 = \text{اسطوانہ کا وزن}$$

∴ ہٹائے ہوئے پانی ب نَ ا ن ج کا وزن

$$= \text{ک}_2\left[\pi\,\text{ر}^2\,\text{لا} - \text{ن ا نَ کا حجم}\right]$$

$$= \text{ک}_2\left[\pi\,\text{ر}^2\,\text{لا} - \pi\,\text{ر}^2 \times \tfrac{1}{2}\,\text{ا ل}\right]$$

$$\therefore\ \text{ف ک}_1 = \text{ک}_2\left[\text{لا} - \tfrac{1}{2} \times \text{ا ل}\right] = \text{ک}_2\left[\text{لا} - \frac{\text{سہ}^2\,\text{ر}^2}{4\,\text{ج}}\right]$$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{\text{ک}_1}{\text{ک}_2}\,\text{ف} + \frac{\text{سہ}^2\,\text{ر}^2}{4\,\text{ج}}$$

۲۶- ایک مخروط جس کا ارتفاع ھ ہے اور نصف راسی زاویہ ۳۰° ہے ایک مائع کے اندر اسطرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس

نیچے کی طرف ہے۔ مائع کی کثافت مخروط کی کثافت کی ۸/۷ ہے اگر مائع ایک ایسے محور کے گرد جو مخروط کے محور پر منطبق ہو زاوی رفتار √(ج/ف) سے گھومے تو ثابت کرو کہ مخروط کے قاعدہ کا کنارہ عین پانی کی سطح میں ہوگا۔

۲۷۔ ایک برتن کے اندر کچھ پانی ہے برتن کے ایک پہلو کے ساتھ کاگ کا ایک چھوٹا ٹکڑا جس کی کمیّت م ہے اور کثافتِ اضافی ک ہے ایک پتلی رسّی کے ذریعہ باندھ دیا گیا ہے، رسّی کا طول ل ہے، اگر یہ نظام اضافی توازن کی حالت میں یکساں زاوی رفتار سے انتصابی محور کے گرد گھومے تو ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ م ل ج (۱/ک − ۱) ÷ ف ہوگا جہاں ف کاگ کی اونچائی ہے اس نقطہ کے اوپر جس سے یہ بندھا ہے اور ج جاذبۂ ارض ہے۔

فرض کرو کہ گردش کے محور سے کاگ کا افقی فاصلہ ما ہے اور گرد کے مائع کا جو دباؤ کاگ پر عمل کرتا ہے وہ وہی ہے جو کاگ کی جگہ مائع ہونے کی صورت میں اس مائع پر عمل کرتا۔ اس مائع کی کمیّت م/ک ہے اور دباؤ اس کے وزن م/ک ج کو سہار سکتا ہے اور علاوہ ازیں محور کی سمت میں عمل کرنے والی ضروری قوت م/ک سہ^۲ ما پیدا کرتا ہے۔ یہ دونوں قوتیں رسّی کے تناؤ ت اور کاگ کے وزن م ج کے ساتھ ملکر لازماً محور کی طرف عادی اسراع م سہ^۲ ما پیدا کرتی ہیں، پس اگر انتصابی سمت کے ساتھ رسّی کا میلان ط ہو تو

ت جم ط + م ج = م/ک ج ....(۱)

م سہ^۲ ما = م/ک سہ^۲ ما − ت جب ط ......(۲)

مساوات (۱) سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۸ - ایک چھوٹا گولہ (کثافتِ اضافی > ۱) ایک رسّی کے ذریعہ اس

محور کے ساتھ بندھا ہوا ہے جس کے گرد پانی کی ایک خاص مقدار یکساں زاوی رفتار سہ سے گھوم رہی ہے رسی کا طول ل ہے، گولہ پانی کے اندر پورا ڈوبا رہتا ہے اور بلحاظ پانی کے توازن کی حالت میں ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے ایک محل میں رسّی انتصابی حالت میں نہیں ہوگی بشرطیکہ سہ $> \sqrt{\frac{ج}{ل}}$ اور اس صورت میں توازن قائم ہوگا۔

باب یازدہم

متفرق مسائل

۱۶۸ — **اچھال کی سطح** — اگر ایک جسم جو کسی مائع میں تیر رہا ہو حرکت کرکے یالتواتر ایسے سب محل اختیار کرے جن میں ہٹائے ہوئے مائع کا حجم ہمیشہ وہی ہو تو مختلف صورتوں میں جسم کے اچھال کے جو مرکز ہونگے اُن کا طریق **اچھال کی سطح** کہلاتی ہے

اگر جسم ایک پنترا ہو یا اگر جسم کو اس طرح حرکت دی جائے کہ اچھال کا مرکز ہمیشہ ایک ہی سطح مستوی میں رہے تو اس مرکز کے طریق کو **اچھال کا منحنی** کہتے ہیں۔

تیرنے والے جسم کی وہ تراش جس میں مائع کی سطح اس کو قطع کرتی ہے **تیرنے کی سطح مستوی** کہلاتی ہے۔

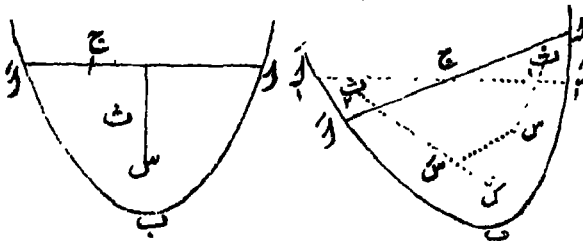
۱۶۹ — اچھال کی سطح کے کسی نقطہ پر کی مماسی سطح تیرنے کی متناظر مستوی سطح کے متوازی ہوتی ہے۔

اسطوانہ کی شکل کے ایک جسم پر غور کرو جسکی انتصابی تراش منحنی اب اَ ہے۔

فرض کرو کہ اج اَ تیرنے کی ابتدائی سطح مستوی ہے

اور اس کے جواب میں اچھال کا مرکز یعنی اس کے متناظر ہٹائے ہوئے سیال اب اَ کا مرکز ثقل س ہے۔

جسم کو ایک چھوٹے زاویہ میں سے اس طرح گھماؤ کہ اَج اَ تیرنے کی نئی مستوی سطح ہو اور ڈوبا ہوا حجم وہی رہے۔

یعنی فرض کرو کہ حجم اج اِ = حجم اَج اَ = حَ (فرض کرو) فرض کرو کہ

اِب اَج کا حجم ح ہے اور حجموں اج اِ

اور اَج اَ کے ثقلی مرکز بالترتیب ثِ اور ثَ ہیں۔

ثِ س کو ملاؤ اور اس کو ک تک اتنا خارج کرو کہ

ثِ س : س ک :: ح : حَ

اور ∴ حَ × ثِ س = ح × س ک ....(۱)

لہذا علم سکون دفعہ ۱۱۶ کے بموجب ک مرکز ثقل ہے حجم اِب اَج کا،

ک ثَ کو ملاؤ اور اس پر نقطہ سَ ایسا لو کہ

ک سَ : سَ ثَ :: حَ : ح ......(۲)

اس لئے ح × ک سَ = حَ × سَ ثَ

لہذا اگر حجم ح، ک پر اور حَ، ثَ پر فرض کیا جائے تو ان کا مرکز ثقل سَ ہوگا۔

پس سَ مرکز ثقل ہے اِب اَ اَ کا اور اسلئے اچھال کا

نیا مرکز ہے۔

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{ث_۱ س}{س ک} = \frac{ح}{ح'} = \frac{ث_۲ سَ}{سَ ک}$$

اور اس لئے اقلیدس م ۶ ش ۲ سے ث۱ ث۲ متوازی ہے س سَ کے۔

اب اگر زاویہ ا ج ا' کو نہایت چھوٹا بنا دیا جائے تو نقاط س اور سَ اچھال کی سطح پر کے دو متصل نقطے ہونگے اور خط ث۱ ث۲ بالآخر ا اَ پر منطبق ہو جائے گا۔

لہذا بالآخر اچھال کی سطح کے نقطہ س پر کی مماسی سطح متناظر تیرنے کی سطح مستوی ا اَ کے متوازی ہوگی۔

۱۷۰۔ دفعہ ماقبل کا ثبوت ہر قسم کے جسم پر صادق آئے گا خواہ تیرنے والا جسم اسطوانہ کی طرح کا ہو یا کسی اور طرح کا۔ عام صورت میں ہم اسی طرح سے ثابت کرسکتے ہیں کہ اچھال کی سطح کے نقطہ س کو اس کے متصل نقطہ سَ سے ملانے والا خط تیرنے کی سطح مستوی کے متوازی ہوتا ہے۔

۱۷۱۔ ایک تیرنے والے جسم کے توازن کے محل جسم کے مرکز ثقل میں سے اچھال کی سطح پہ عماد کھینچنے سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

دفعہ ۵۷ کے بموجب ث س انتصابی ہے اور اس لئے ا اَ پر عمود ہے دیکھو شکل اول دفعہ ۱۶۹، اس لئے اس دفعہ کے

نتیجہ کی رو سے ث س اُس مماسی سطح پر بھی عمود ہوگا جو
اچھال کی سطح کے نقطہ س میں سے کھینچی جائے۔
پس ث س اچھال کی سطح کے نقطہ س پر کا
عماد ہے۔
لہٰذا کسی تیرنے والے جسم کے توازن کے سب ممکن
محل جسم کے مرکزِ ثقل میں سے اچھال کی سطح میں عماد
کھینچنے سے حاصل ہوتے ہیں۔
۱۷۲۔ اچھال کے منحنی کے نقطہ س پر کا مرکزِ انحناء
جسم کا مرکزِ مابعد ہوتا ہے۔
دفعہ ۶۸ میں ہم نے بتایا تھا کہ مرکزِ مابعد اچھال کے متصل
مرکزوں س اور سَ میں سے گزرنے والے انتصابی خطوں کا
نقطۂ تقاطع ہوتا ہے، لیکن دفعۂ ماقبل کی رو سے یہ دو انتصابی
خط س اور سَ پر اچھال کے منحنی کے عماد ہیں۔ اس لئے
مرکزِ مابعد اچھال کے منحنی کے اُن عمادوں کا نقطۂ تقاطع ہے
جو اس کے متصلہ نقاط س اور سَ پر کھینچے جائیں لہٰذا
م نقطہ س پر اچھال کے منحنی کا مرکزِ انحناء ہے۔
۱۷۳۔ اچھال کے منحنی کی خاص صورتیں۔
اگر دفعہ ۱۶۹ کا جسم ایک مثلث ن ق ر ہو جو مائع کے
اندر اس طرح جزاً غرق ہو کہ اس کا راس ن مائع کی سطح
میں ہو اور قاعدہ ق ر بالتمام مائع کے باہر ہو تو تیرنے
کی سطح مستوی سے جو مثلث ن ا اَ قطع ہو جاتا ہے اس کا

رقبہ مستقل ہوتا ہے ۔
تناظر اچھال کا مرکز س خطِ مستقیم ن د پر ہے جہاں
د ، ا ا َ کا وسطی نقطہ ہے اور ن س = ۲/۳ ن د
اگر س میں سے افقی خط ل لَ کھینچا جائے جو ن ق
سے ل پر اور ن ا سے لَ پر ملے تو

رقبہ ن ل لَ = ن س^۲ / ن د^۲ × ن ا اَ = ۴/۹ رقبہ ن ا اَ = مستقل ہے

لہٰذا ل لَ ایک مستقل رقبہ کا مثلث ن ل لَ قطع کرتا ہے
بنابریں مخروطات کے خواص کی رُو سے ل لَ اپنے وسطی
نقطہ س پر ہمیشہ ایک قطع زائد سے مس کرتا ہے جسکے
متقارب ن ل اور ن لَ ہیں ۔

پس اس صورت میں س کا طریق یعنی اچھال کا منحنی
ایک قطع زائد ہوتا ہے جس کے متقارب مثلث کے دو ڈوبے
ہوئے اضلاع ہوتے ہیں ۔

اگر جسم کا وہ حصہ جو ڈوبا ہوا ہو مستطیل ہو تو یہ بتایا
جا سکتا ہے کہ اچھال کا منحنی قطع مکافی ہوگا ۔

۱۷۴ ۔ مرکز مابعد کا محل ۔ مرکز مابعد کے مقام کا تعین
اس کتاب کی حدود سے باہر ہے ۔

اگر جسم متشاکل ہو اور اس کو اس طرح ہٹایا جائے کہ
دفعہ ۱۶۹ کی شکل میں جو نقطہ ج ہے وہ تیرنے کی سطح مستوی
ا ج اَ کا مرکز ثقل ہو تو یہ بتایا جا سکتا ہے کہ س م

[دیکھو شکل دفعہ ۶۷]

$$= \frac{ل \times ک^2}{ح}$$

جہاں ل جسم کی اُس تراش اَ ج اَ کا رقبہ ہے جس پر تیرنے کی سطح مستوی جسم کو کاٹتی ہے اور ح جسم کے ڈوبے ہوئے حصہ کا حجم ہے اور ک کوئی مستقل مقدار ہے۔

اگر جسم کی یہ تراش جو تیرنے کی سطح مستوی سے حاصل ہو مستطیل ہو [مستطیل میں خطِ مستقیم بھی شامل ہے جو جسم کے پتلا ہونے کی صورت میں ہوگا]

$$\text{تو } ک^2 = \frac{ج اَ^2}{۳}$$

$$\text{جب تراش ایک دائرہ ہو تو } ک^2 = \frac{ج اَ^2}{۴}$$

بالعموم ک^۲ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے احصائے تکملات سے کام لینا پڑتا ہے۔

[استوار اجسام کے علم حرکت کی اصطلاح میں مقدار ا × ک^۲ کو بالعموم جمود کا معیار اثر کہتے ہیں، اس صورت میں یہ تیرنے کی سطح مستوی کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے خط کے گرد ہوگا جو ج میں سے گزرے اور کاغذ کی سطح پر عمود ہو]

۱۷۵- دفعہ ماقبل کے نتیجہ کو تسلیم کرتے ہوئے ہم چند آسان صورتوں میں توازن کے قائم ہونے کی شرائط معلوم کرسکتے ہیں

مشق ۱ – ایک مکعب جس کا ضلع ۲ا ہے اور کثافت $ک_۱$ ہے $ک_۲$ کثافت والے ایک سیال میں تیر رہا ہے، توازن کے قیام کی شرائط معلوم کرو۔

یہاں $ا = ۴ا^۲$، $ک^۲ = \frac{ا^۲}{۳}$، $ح = ۴ا^۲ لا$ جہاں لا = ڈوبی ہوئی گہرائی $= \frac{۲ا ک_۱}{ک_۲}$

$$اس\ لئے\ س م = \frac{ا ک^۲}{ح} = \frac{ا^۲}{۳لا}$$

پس چھوٹے زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن قائم ہوگا

$$اگر\ س م > س ث$$

$$یعنی\ اگر\ \frac{ا^۲}{۳لا} > ا - \frac{لا}{۲}$$

$$یعنی\ اگر\ \frac{ا^۲}{۳} > \frac{۲ا^۲ ک_۱}{ک_۲} - \frac{۲ا^۲ ک_۱^۲}{ک_۲^۲}$$

$$یعنی\ اگر\ ک_۲^۲ > ۶ک_۱(ک_۲ - ک_۱)$$

مشق ۲- ایک مستدیر اسطوانہ جس کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف، ایک سیال کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، اگر اسطوانہ کی کثافت $ک_۱$ ہو اور سیال کی $ک_۲$ تو اسطوانہ کے توازن کے قیام کی شرائط معلوم کرو۔

اگر $لا = (= \frac{ک_۱ ف}{ک_۲})$ غرق شدہ طول تو

$$س م = \frac{ا ک^۲}{ح} = \frac{\frac{ا^۲}{۴} \times \pi ا^۲}{لا \times \pi ا^۲} = \frac{ا^۲}{۴لا}$$

پس چھوٹے زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن قائم ہوگا

اگر $س م > س ث$

یعنی اگر $\frac{ر^2}{۴ لا} > \frac{ف}{۲} - \frac{لا}{۲}$

یعنی اگر $ر^2 > ۲ ف^2 \left[\frac{ک_۱}{ک_۲} - \frac{ک_۱^2}{ک_۲^2} \right]$

مشق ۳ — ایک مخروط جس کا ارتفاع ف ہے اور قاعدہ کا نصف قطر ر ہے ایک سیّال کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے، اگر مخروط کی کثافت $ک_۱$ ہو اور سیّال کی $ک_۲$ تو مخروط کے قائم توازن میں رہنے کی شرائط معلوم کرو۔

اگر محور کا ڈوبا ہوا طول لا ہو اور مخروط کی جو تراش تیرنے کی سطح مستوی سے حاصل ہوتی ہے اس کا نصف قطر ب ہو تو

$$\frac{۱}{۳} \pi ب^2 لا ک_۲ = \frac{۱}{۳} \pi ر^2 ف ک_۱ \quad \text{اور} \quad \frac{ب}{لا} = \frac{ر}{ف}$$

یعنی $لا^3 ک_۲ = ف^3 ک_۱$

نیز $ر = \pi ب^2 ، ک^2 = \frac{ب^2}{۴}$ اور $ح = \frac{۱}{۳} \pi ب^2 لا$

$$\therefore س م = \frac{ر ک^2}{ح} = \frac{۳ ب^2}{۴ لا} = \frac{۳}{۴} \frac{ر^2}{ف^2} لا$$

پس توازن قائم ہوگا اگر $س م > س ث$

یعنی اگر $\frac{۳}{۴} \frac{ر^2}{ف^2} لا > \frac{۳ ف}{۴} - \frac{۳ لا}{۴}$

یعنی اگر $\text{لا} > \text{فنا} \times \frac{\text{ف}^2}{\text{ف}^2+\text{ا}^2}$ یعنی $> \text{ف}\,\text{جم}^2\,\text{عہ}$

یعنی اگر $\frac{\text{ک}_1}{\text{ک}_2} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ف}^2} > \text{جم}^2\,\text{عہ}$

جہاں عہ مخروط کا نصف راسی زاویہ ہے۔

امثلہ نمبری ۳۳

۱۔ ایک مستطیل کے اضلاع ۲ا اور ۲ب ہیں، یہ ایک سیال کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ۲ب طول والا ضلع انتصابی ہے، اگر مستطیل کی کثافت ک_1 ہو اور سیال کی ک_2 تو ثابت کرو کہ چھوٹے زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\text{ا}^2}{6\,\text{ب}^2} > \frac{\text{ک}_1}{\text{ک}_2} - \frac{\text{ک}_1^2}{\text{ک}_2^2}$$

۲۔ ایک یکساں مستطیلی جسم جس کی کثافت اضافی $\frac{1}{2}$ ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک کنارہ انتصابی ہے، اگر سب سے چھوٹا ضلع افقی ہو اور اس کا طول ب ہو اور انتصابی کنارہ کا طول ج ہو تو ثابت کرو کہ توازن کے قائم ہونے کیلئے

$$\text{ب} > \frac{\text{ج}}{2}\sqrt{6}$$

۳۔ ایک مستدیر اسطوانہ کسی مائع کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور افقی ہے، سیال کی کثافتِ اضافی اسطوانہ کی کثافت اضافی کی دو چند ہے، اس کے محور میں سے گزرنیوالی

انتصابی سطح مستوی میں اس کو ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ کا ارتفاع اس کے قاعدہ کے قطر سے زیادہ ہوگا تو توازن قائم ہوگا۔

۴۔ دفعہ ۵۷، امشق ۳ کا مخروط اسطح تیر رہا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے، ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$ک^۲ > ک^۲ (۱ - جم^۶ عہ)$$

۵۔ ایک جہاز کا مجموعی ہٹاؤ ص ٹن ہے اور اس کے مرکز مابعد کا ارتفاع ف فٹ ہے، اس کے تختہ پر کی ایک توپ جسکی کمیت ص٫ ٹن ہے اپنے اصلی مقام سے فاصلہ ل فٹ کھینچکر دوسری جگہ کردی گئی ہے، ثابت کرو کہ اس سے جہاز ایک ایسے چھوٹے زاویہ میں گھوم جائے گا جس کا قوسی پیمانہ $\frac{ص٫ ل}{ص ف}$ ہوگا۔

[مرکز مابعد کے ارتفاع" سے مراد جسم کے مرکزِ ثقل سے مرکزِ مابعد کا ارتفاع ہے جو دفعہ ۶۷ کی اشکال میں ث م سے تعبیر ہوتا ہے]

۶۔ ایک انگریزی جہاز ایکلز کا ہٹاؤ ۹۰۰۰ ٹن تھا، جب اسکے تختہ پر ۲۰ ٹن وزن اس کے ایک سرے سے ۴۲ فٹ کے فاصلہ میں سے کھینچ کر دوسرے سرے پر رکھا گیا تو معلوم ہوا کہ ایک رقاص کا گولہ ۱۰ انچ ہٹ گیا ہے اگر رقاص کا طول ۲۰ فٹ ہو تو ثابت کرو کہ مرکزِ مابعد کا ارتفاع ۲۲۴ر۲ فٹ تھا۔

[اس مثال سے اور مثال ماقبل سے ظاہر ہوتا ہے کہ ایک جہاز کے مرکزِ مابعد کا ارتفاع کس طرح تجربہ سے معلوم ہوسکتا ہے]

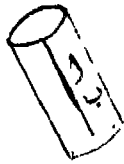
ایسے ظرفوں کے تناؤ جن کے اندر سیال ہوں

۱۷۶ - فرض کرو کہ اسطوانہ کی شکل کا ایک ظرف کسی پتلی لچکدار چیز مثلاً ریشم سے بنایا گیا ہے اور اس کو کسی خاص دباؤ کی گیس سے بھر دیا گیا ہے اس گیس کا دباؤ صریحاً ہر جگہ یکساں ہو گا۔

اس کی سطح کے کسی ایسے طول اب پر غور کرو جس کی سمت وہی ہو جو اسطوانہ کے محور کی ہے۔ گیس کا دباؤ ریشم میں کچھ تناؤ پیدا کرے گا اور تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ دباؤ اب پر عمود وار ہو گا۔

اگر وہ کل قوت جو اب کی دونوں جانب کے حصوں کو باہم ملائے رکھنے کے لئے اب پر عموداً لگانی پڑتی ہے ت ہو تو مقدار $\frac{ت}{اب}$ یعنی وہ قوت جو اب کے اکائی طول پر لگانی پڑتی ہے اب پر کا تناؤ کہلاتی ہے اور ت سے تعبیر کی جاتی ہے۔

اگر ریشم اس تناؤ ت کو برداشت کرنے کے لئے کافی مضبوط نہ ہو تو ریشم پھٹ جائے گا۔

۱۷۷ - بہت سی صورتوں میں اب جیسے جزو کا مجموعی عمل اب پر عمود وار نہیں ہوتا بلکہ اس قوت کے علاوہ اب کی سمت میں مماسی قوت یا جزی زور بھی عمل کرتا ہے

لیکن ہم کسی ایسی صورت پر بحث نہیں کرینگے جس میں یہ مماسی عمل موجود ہو۔

۱۷۸۔ مستدیر اسطوانے کی شکل کے ایک برتن کو جس کا محور انتصابی ہے کسی مائع سے بھر گیا ہے، اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ایک اسطوانہ ہے اور اس کی دو نہایت قریب کی تراشیں ن ر ق اور نَ رَ قَ ہیں۔

چونکہ ن نَ، ق قَ بہت چھوٹے ہیں اس لئے تراشوں کے درمیان کے سب نقطوں پر کا دباؤ مستقل خیال کیا جا سکتا ہے، فرض کرو کہ یہ دباؤ د کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ ن نَ یا ق قَ پر کا تناؤ ت ہے، یہ ظاہر ہے کہ ایک ہی افقی سطح پر کے سب نقطوں کے لئے ت کی قیمت وہی ہو گی۔

اس نصف دائرہ کی شکل کے اس حصہ کے توازن پر غور کرو جو ن نَ اور ق قَ سے اور دو نصف دائروں ن ر ق اور نَ رَ قَ سے احاطہ کیا ہوا ہے۔

اس حصہ پر افقی سطح مستوی میں عمل کرنے والی یہ قوتیں ہیں اولاً دو تناؤ جن میں سے ایک ن نَ پر کا تناؤ ہے اور د ت × ن نَ کے مساوی ہے اور دوسرا ق قَ پر کا تناؤ ہے جو ت × ق قَ کے

مساوی ہے اور ثانیاً ن نَ رَ قَ ق ر ن پر کا حاصل افقی دباؤ۔

حاصل افقی دباؤ دفعہ ۵۲ کی رُو سے مستطیل ن ق قَ نَ پر کے افقی دباؤ کے مساوی ہے اور اس لئے

= ن ق × ن نَ × د

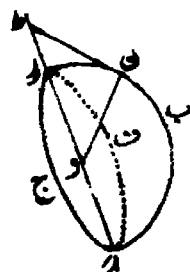
اس لئے ۲ ت × ن نَ = ن ق × ن نَ × د

یعنی ت = د × $\frac{\text{ن ق}}{۲}$ = د × ر جہاں ر اسطوانہ کا نصف قطر ہے۔

نتیجہ صریح ۔ اگر اسطوانہ کو کسی گیس سے بھرا جائے تو اسکا دباؤ سب جگہ تقریباً وہی ہوتا ہے اور خواہ اسطوانہ کا محور انتصابی نہ بھی ہو تو بھی ربط ت = د ر صحیح رہتا ہے۔

۱۷۹ ۔ ایک کروی سطح کا نصف قطر ر ہے اور اسکے اندر دباؤ د پر کچھ گیس ہے، اگر سطح کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ت ہو تو ثابت کرو کہ ۲ ت = د × ر

تشاکل سے ظاہر ہے کہ تناؤ ت مستقل ہے۔

کوئی سطح مستوی لو جو کرہ کے مرکز میں سے گزرے اور فرض کرو کہ یہ کرہ سے دائرہ ا ج اَ ق پر ملتی ہے، جو نصف کرہ ا ج اَ ب اس سے منقطع ہوتا ہے اسکے توازن پر غور کرو۔

ا ج اَ کے ہر نقطہ پر تناؤ ت عمل کرتا ہے جو سطح مستوی
ا ج اَ پر عمود وار ہے۔

∴ ت × ۲ π ر = سطح مستوی ا ج اَ پر عموداً عمل کرنے والی
قوت جو اُسی سمت میں کے حاصل دباؤ کے مساوی ہے،

اب ن پر کے رقبہ کے کسی چھوٹے جزو عہ پر جو دباؤ
عمل کرتا ہے اس کا وہ جزو ترکیبی جو سطح مستوی ا ج اَ
پر عمود وار ہو

= عہ × د جب ن و ا = د × عہ جم ن ط ا جہاں ن طَ ن پر کا مماس ہے۔

= د × عہ کا ظل سطح مستوی ا ج

رقبہ کے باقی ہر جزو کی یہی کیفیت ہے

∴ ا ب اَ پر کے حاصل دباؤ کا وہ جزو ترکیبی جو سطح مستوی
ا ج اَ پر عمود وار ہو

= د × ا ب اَ کا ظل سطح مستوی ا ج اَ پر

= د × ا ج اَ کا رقبہ = د × π ر۲

اس لئے ت × ۲ π ر = د × π ر۲

یعنی ۲ ت = د × ر

دفعات ۱۷۸ اور ۱۷۹ کے نتائج کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ
اگر ہمارے پاس ایک ہی نصف قطر کے دو ظروف ہوں ایک اسطوانہ
کی شکل کا اور دوسرا کروی اور دونوں میں ایک ہی دباؤ کی ہوا ہو
تو پہلے ظرف کا تناؤ دوسرے ظرف کے تناؤ کی نسبت دگن ہوتا
ہے، لہذا ضروری ہے کہ ایک ہی مقدار کے دباؤ کو برداشت

کرنے کے لئے اسطوانہ کی شکل کا ظرف کروی ظرف کی نسبت دُگنا مظبوط بنایا جائے۔

۱۸۰۔ دفعات ۱۷۸ اور ۱۷۹ میں اگر سطح پر اندرونی دباؤ د اور بیرونی دباؤ П عمل کرے تو ہمیں د کی بجائے د۔П رکھنا پڑیگا۔

۱۸۱۔ اگر اسطوانہ کچھ محدود چھوٹی موٹائی رکھتا ہو تو ظرف کی طاقتِ برداشت کو محسوب کرتے ہوئے ہمیں اسکی موٹائی کو بھی ملحوظ رکھنا چاہئے۔ مثلاً اگر ہمیں معلوم ہو کہ کوئی شے فی اکائی رقبہ تہ تناؤ برداشت کرسکتی ہے تو جسم کی موٹائی ج ہونے کی صورت میں

ت = تہ ج

مشق۔ تناؤ برداشت کرنے میں ایک دھات کی طاقت ۱۶۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہے، اس دھات سے ایک کروی ظرف تیار کیا گیا ہے جس کا نصف قطر ایک فٹ ہے اور موٹائی $\frac{1}{10}$ انچ، بتاؤ کہ سیّال کا فی مربع انچ کتنا دباؤ اس کو توڑ دینے کے لئے کافی ہوگا۔

یہاں ت = $\frac{1}{10}$ × ۱۶۰۰۰ پونڈ وزن

پس ضابطہ ۲ت = د × ر سے

د × ۱۲ = ۲ × ۱۶۰۰ = ۳۲۰۰

∴ د = $\frac{۳۲۰۰}{۱۲}$ = ۲۶۶ $\frac{۲}{۳}$ پونڈ وزن فی مربع انچ۔

امثلہ نمبری ۳۴

۱۔ دو جوشدانوں کے سرے نصف کروی شکل کے ہیں، ایک سرے کی

موٹائی دوسرے کی موٹائی کی نسبت دو چند ہے اور اس کا نصف قطر بھی دوسرے کے نصف قطر کا تین گنا ہے، وہ بڑے سے بڑا دباؤ معلوم کرو جو یہ سہار سکتے ہیں۔

۲- ایک دھات فی مربع انچ ۱۲۰۰۰ پونڈ کا تناؤ برداشت کر سکتی ہے اگر اس دھات سے ایک اسطوانہ تیار کیا جائے جس کا نصف قطر ۶ انچ ہو اور موٹائی $\frac{1}{4}$ انچ تو بتاؤ کہ کتنا سیالی دباؤ اس ظرف کو توڑنے کے لیئے عین کافی ہوگا۔

۳- ایک نل کو جس کا اندرونی قطر ۸ انچ ہے ۲۰۰ فٹ کی بلندی تک پانی پہنچانے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر نل کی دھات صرف دس ہزار پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ برداشت کر سکے تو بتاؤ کہ نلی کی موٹائی کم سے کم کیا ہونی چاہیئے جبکہ پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $62\frac{1}{2}$ پونڈ ہو۔

۴- ربڑ کے ایک گیند کے اندر ہوا ہے، جب تپش صفر درجہ سنتی گرید پر ہو تو گیند کا نصف قطر ا ہوتا ہے، اگر ربڑ کا تناؤ ہمیشہ گیند کے نصف قطر کے مربع کا مہ گنا ہو تو بتاؤ کہ تْ سنتی گرید پر گیند کا نصف قطر کیا ہوگا۔

سنٹی میٹر کتنے ڈائن کا دباؤ ہے جبکہ ج کی قیمت ۹۸۰ لی جائے۔

۳۰۔ ایک لائما نلی کی ساقیں انتصابی ہیں اور اِن کا درمیانی فاصلہ ف ہے، ساقوں کی عمودی تراشوں کے رقبے بالترتیب ک۱ اور ک۲ ہیں اور نلی میں پارہ بھر کر اس کو ک۱ رقبے والی ساق کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے ثابت کرو کہ ک۲ رقبے والی جو شاخ گھوم رہی ہے اس کے اندر کا پارہ اوسط ہمواری سے

$$\text{بقدر}\ \frac{ک_۱}{ک_۱ + ک_۲} \times \frac{سہ^۲ ف^۲}{۲ ج}\ \text{اوپر چڑھ جائیگا۔}$$

۳۱۔ ایک یکساں تختے کا طول ا ہے اور موٹائی ب، اس کا وزن و ہے اور یہ پانی میں تیر رہا ہے، اس کے اوپر اسکے عین درمیان میں و۱ وزن والا ایک آدمی کھڑا ہے اور تختے کا دو تہائی حجم ڈوبا رہتا ہے ثابت کرو کہ اگر آدمی تمام تختے پر چلے تو تختہ کے اوپر کی سطح کا کوئی حصہ نہیں ڈوبے گا بشرطیکہ

$$\frac{و_۱}{و}\ \text{بڑا نہ ہو}\ \frac{۹ ا^۲ - ۱۰ ب^۲}{۴۵ ا^۲ + ۴۶ ب^۲}\ \text{سے}$$

۳۲۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک برتن میں کچھ پانی ہے، اس کے اندر ایک مجوف مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ توازن کی حالت میں جس دائرہ پر پانی کی سطح مخروط کو کاٹتی ہے اسکے رقبہ کی نسبت اسطوانہ کے قاعدہ کے رقبہ سے ۱۹:۶ ہے، پانی کے جس حجم کو مخروط ہٹائے ہوئے ہے اس کے $\frac{۱۹}{۸}$ حجم کے مساوی اور پانی مخروط کے اندر ڈالا گیا ہے اور اتنا ہی پانی اسطوانہ میں

ڈالا گیا ہے ثابت کرو کہ فضا میں مخروط کا مقام وہی رہے گا۔

۳۳- ایک مقام پر پانی کا بارپیما ۳۴ فٹ پر ہے اور ہوا کی تپش ۰° سنتی گرید پر، ایک ظرف غواص جس کے اندر کرہ ہوائی کی تپش اور دباؤ پر ہوا بھری ہوئی ہے پانی کے اندر اتنا غرق کیا گیا ہے کہ اسکے نیچے کا کنارہ پانی کی سطح سے ۱۷ فٹ کی گہرائی پر ہے ظرف غواص کی گنجائش ۴۸ مکعب فٹ ہے اور پانی کی تپش ۷° سنتی گرید ہے۔ بتاؤ کہ کرہ ہوائی کی تپش اور دباؤ پر اسکے اندر اور کتنی ہوا داخل کی جائے کہ اندر کی ہوا پانی کی تپش پر آجانے کے بعد پورے ظرف کو عین بھر دے۔ [ہوا کے پھیلاؤ کی قدر = $\frac{1}{273}$]

۳۴- اسطوانہ کی شکل کا ایک ظرفِ غواص پانی کے اندر اتارا گیا ہے اور ظرف کی موٹائی کو نظر انداز کیا گیا ہے، اس محل سے شروع کرکے جس میں کہ ظرف غواص عین ڈوبا ہوا ہو رسی کے تناؤ میں بالتدریج جو تبدیلی ہوتی جاتی ہے اسکو ظاہر کرنے کے لئے ترسیمی طریق پر ایک منحنی کھینچو۔

۳۵- ایک اسطوانہ کے اوپر کے مستوی رخ پر ایک نصف کرہ لگا کر ایک ظرفِ غواص بنایا گیا ہے۔ اسطوانہ کا طول ج اور نصف قطر ر ہے، بتاؤ کہ ظرفِ غواص کو کس گہرائی تک ڈبویا جائے کہ صرف نصف کرہ کے اندر ہوا رہ جائے، نیز ثابت کرو کہ اس محل میں کرہ ہوائی کے دباؤ پر ہوا کا وہ حجم جس کو ظرف کا تمام پانی نکالنے کے لئے اس کے اندر بھرنا پڑے گا ظرف غواص کے حجم کا

$\left(\frac{ج}{ف} + \frac{۳}{۲} \times \frac{ج}{ر}\right)$ گنا ہوگا جہاں ف پانی کے بارپیما کا ارتفاع ہے۔

۳۶- پتلے یکسان سوراخ کی ایک خمدار نلی دو سیدھی شاخوں کو علی القوائم جوڑنے سے بنائی گئی ہے، ایک شاخ افقی ہے اور دوسری انتصابی، افقی شاخ کا آزاد سرا بند ہے اور انتصابی کا کھلا ہے۔ افقی شاخ میں پارہ بھر کر نلی کو انتصابی محور کے گرد جو بند سرے کے بیچ میں سے گزرتا ہے یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے، ثابت کرو کہ پارہ انتصابی شاخ میں اونچائی د تک چڑھ جائے گا جہاں

$$\text{سہ}^2 = \frac{2\,\text{ج}\,(\text{ف} + \text{د})}{\text{ل}^2 - \text{د}^2}$$

، اس میں ل افقی شاخ کا طول ہے، ف پارہ کے بارپیما کا ارتفاع ہے اور ج جاذبۂ ارض ہے، نیز بتاؤ کہ اگر $\text{سہ}^2\,\text{ل}^2 > 2\,\text{ج}\,\text{ف}$ تو پارہ اوپر نہیں چڑھیگا۔

۳۷- پتلے سوراخ کی ایک نلی دائرہ کی شکل کی ہے جس کا نصف قطر ر ہے نلی میں کچھ سیّال پڑا ہے جسکے محاذی مرکز پر زاویہ π + طہ بنتا ہے، نلی اپنے ایک انتصابی مماس کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے حرکت کر رہی ہے اور سیّال اسکے عین اوپر کے نقطہ تک پہنچ گیا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{ر}\,\text{سہ}^2 \left[\text{سں}\,\frac{\text{طہ}}{2} - \text{جب}^2\,\frac{\text{طہ}}{2}\right] = \text{ج}\ (\text{جاذبۂ ارض})$$

۳۸- ایک کروی ظرف کے اندر پانی کی کچھ مقدار پڑی ہے جسکے حجم کی نسبت ظرف کے حجم کے ساتھ $\text{ن}^3 : 1$ ہے، ظرف کا نصف قطر ر ہے، اگر پانی ایک ایسی زاوی رفتار سے حرکت کرے جس کا مربع $\frac{\text{ج}}{\text{ر}\,(1 - \text{ن})}$ سے کم نہ ہو تو ثابت کرو کہ سب سے نچلے نقطہ پر کے

ایک چھوٹے سوراخ میں سے کوئی پانی باہر نہیں نکلیگا۔

۳۹۔ ایک اسطوانہ کا نصف قطر ر ہے اور اسکا پیندا ایک ایسی مخروطی سطح سے بند کیا ہوا ہے جس کا راسی زاویہ ۲ عہ ہے اور راس نیچے کی طرف ہے۔ اسطوانہ کے اندر کچھ مائع گھوم رہا ہے آزاد سطح کا وترِ خاص ل ہے، ثابت کروکہ مخروط کی سطح کے اس نقطہ پر کا دباؤ کم سے کم ہوگا جس کا فاصلہ محور سے $\frac{۱}{۲}$ ل ھم عہ ہے بشرطیکہ ل > ۲ ر سس عہ

۴۰۔ ایک مجوف مخروط جس کا راس اوپر کی طرف ہے تین چوتھائی پانی سے بھرا ہوا ہے، اس کو اسکے محور کے گرد جو انتصابی ہے یکساں زاوی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۸ج}}{\text{۳ف}}}$ ھم عہ کے ساتھ گھمایا گیا ہے جہاں عہ مخروط کے راسی زاویہ کا نصف ہے اور ف مخروط کا ارتفاع ہے ثابت کرو کہ قاعدہ پر کے مجموعی دباؤ کی نسبت پانی کے وزن کے ساتھ ۱۰ : ۳ ہے۔

۴۱۔ قطع ناقص کی شکل کی ایک نلی آدھی کسی سیال سے بھری ہوئی ہے اور ایک ثابت انتصابی محور کے گرد جو اسکی سطح میں واقع ہے یکساں زاوی رفتار سہ سے گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی آزاد سطحوں کو ملانے والا مستقیم خط، سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ $\text{سس}^{-1}\left[\frac{\text{ج}}{\text{ص سہ}^{2}}\right]$ بناتا ہے جہاں ص قطع ناقص کے مرکز سے محور کا فاصلہ ہے۔

۴۲ـ ایک نصف کروی پیالہ جسکا نصف قطر ا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے، پانی کو ہاتھ سے اس طرح گھمایا گیا ہے کہ سب پانی پیالہ کے محور کے گرد کسی یکساں زاوی رفتار سے گھومنے لگ جاتا ہے، اگر آدھا پانی گر جائے تو یکساں زاوی رفتار دریافت کرو۔

۴۳ـ ایک قائم مخروط جسکا نصف راسی زاویہ عہ ہے ایک مائع کے اندر ڈوبا ہوا ہے اور اس کا مائل ارتفاع جسکا طول ل ہے عین مائع کی سطح میں ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی سطح پر کا حاصل مجموعی دباؤ اس مائل ارتفاع کو ایسے نقطہ پر کاٹے گا جس کا فاصلہ مخروط کے راس سے $\frac{\text{۳ ل}}{\text{۴ (۱ - ۳ جب}^{\text{۲}}\text{ عہ)}}$ ہے، اس حاصل مجموعی دباؤ کی مقدار بھی معلوم کرو۔

۴۴ـ ایک نصف کرہ جسکا وزن و ہے اور کثافتِ اضافی ک اپنے کنارہ کے ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے، اس کے کنارہ پر ثابت نقطہ سے محیط کے ایک چوتھائی فاصلہ پر ن و وزن کا ایک ذرہ ہے، یہ پورا نصف کرہ مائع کے اندر ڈوبا ہوا ہے۔ قاعدہ کی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ دریافت کرو۔

اگر ک = $\frac{\text{۱}}{\text{ن + ۱}}$ تو ثابت کرو کہ میلان جم$^{\text{-۱}}$ $\frac{\text{۳}}{\text{۸ ۳ ۲}}$ ہے۔

۴۵ـ ایک مجوف مخروط کو اس کے محور میں سے گذرنے والی مستوی سطح سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ان حصوں کو مخروط کے راس پر ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کر دیا گیا ہے، یہ مخروط

ایک چکنی میز پر پڑا ہے، اگر مخروط کے رأس پر کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے پانی ڈال کر مخروط کو بھر سکیں تو ثابت کرو کہ پانی کے وزن کو خول کے وزن کے ساتھ جو نسبت ہو گی وہ ہر دو کسور $\frac{۱}{۲}$ اور

$\frac{۴ \text{ جب}^۲ \text{ عہ}}{۹}$ سے کم ہو گی۔

۴۶ - ایک نصف کروی خول ایک مائع کی سطح پر تیر رہا ہے، اگر وہ بڑا سے بڑا وزن جو اسکے کنارہ پر رکھا جا سکے نصف کرہ کے وزن کا ن گنا ہو تو ثابت کرو کہ نصف کرہ کے وزن کی نسبت اُس مائع کے وزن کے ساتھ جو اسکے اندر آ سکے

$$(۱ - \text{جب عہ})^۲ \, (۲ + \text{جب عہ}) : ۲ \, (\text{ن} + ۱)$$

ہے جہاں مس عہ = ۲ ن

[نوٹ - اگر ایک کرہ کا نصف قطر ا ہو اور اسکو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہو تو کرہ کے اس ٹکڑے کا حجم $\frac{\pi}{۳}$ (ا - لا)^۲ (۲ ا + لا) ہو گا۔]

۴۷ - پارہ کی کثافت اضافی ک اور پانی کے بار پیما کا ارتفاع ف دونوں معلوم ہیں، بتاؤ کہ اگر ایک ظرف غواص کی چوٹی کی گہرائی پانی کی سطح کے نیچے ا ہو تو اسکے اندر پارہ کا بار پیما کس ارتفاع پر ہو گا۔ اگر لکڑی کا ایک ٹکڑا (۱) ظرف کے باہر سے اس کے اندر پانی میں گرے (۲) ظرف کے اندر سے ہی پانی میں گرے تو اس ارتفاع میں کیا تبدیلی واقع ہو گی۔

۴۸ - ایک ظرفِ غواص ایک کھاڑی (ڈوک) کے فرش پر

پڑا ہے اور اسکے اوپر کے جس حصہ میں ہوا ہے اس کا ارتفاع ف ہے، ظرف کا وزن اس پانی کے وزن کے مساوی ہے جو اس کو ارتفاع ا تک بھر دیتا ہے، جب اس کو زنجیر کے ذریعہ اوپر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ایک خاص مقام پر یہ پانی سے ہلکا ہو کر خود بخود پانی کی سطح تک اٹھ آئے گا اگر کھاڑی کے پانی کی گہرائی کی نسبت پانی کے بار پیما کے ارتفاع کے ساتھ $\frac{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}{\text{ک}_2} \times \frac{\text{ا}}{\text{ف}} - 1$ سے زیادہ ہو جہاں ک₂ پانی کی کثافت ہے اور ک₁ ظرف کے لوہے کی کثافت ہے۔

[ظرف کے ارتفاع اور نیز ف دونوں کو کھاڑی کی گہرائی اور پانی کے بار پیما کے ارتفاع کے مقابلہ میں چھوٹی مقداریں سمجھنا چاہیئے۔]

۴۹۔ ایک جسم پانی کی سطح پر تیر رہا ہے، اسکے نہ ڈوبے ہوئے حصہ کا حجم ج₁ × ر ہے، ایک ظرفِ غواص جسکا ارتفاع ب₁ ہے اور جسکی تراش کا رقبہ ر ہے اس پر رکھا گیا ہے اور اتنا نیچے اتارا گیا ہے کہ ظرف کی چوٹی پانی کی سطح کے نیچے ا₁ گہرائی پہ پہنچ جاتی ہے تیرنے والے جسم کے اس حصہ کا حجم جو اب ڈوبا ہوا نہیں ہے (ج₁ + جہ ک) ر ہے، ثابت کرو کہ جہ مساوات

$$\text{ف}\ \text{جہ}^2 + \text{ج}_1(\text{ف} - \text{ا}_1 - \text{ج}_1)\ \text{جہ} - \text{ج}_1^2(\text{ا}_1 + \text{ب}_1) = 0$$

کی مثبت اصل ہے، اس میں ف پانی کے بار پیما کا ارتفاع ہے اور ک ایک چھوٹی مقدار ہے جو ہوا کی کثافت اضافی کو ظاہر کرتی ہے۔

۵۰۔ ایک سیدھی نلی کو جسکا نچلا سرا بند ہے ک کثافت والے ایک سیّال سے بھر کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ نلی انتصابی سمت کے ساتھ

زاویہ عہ بناتی ہے، نلی کو بند سرے میں سے گذرنیوالے انتصابی محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے اگر کرہ ہوائی کا دباؤ π ک کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ نلی کا کم سے کم طول جو پانی کے نہ گرنے کے لئے ضروری ہے

$$\frac{\text{ج ک جم عہ} + \text{سہ جب عہ}\sqrt{\text{۲}\pi\text{ک}}}{\text{سہ}^{\text{۲}}\ \text{ک جب}^{\text{۲}}\ \text{عہ}} \quad \text{ہے}$$

[اس مقام پر جہاں دباؤ کی کم سے کم قیمت ہے دباؤ منفی نہیں ہونا چاہیے]

۵۱ ۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف کے اندر کچھ پانی ہے، اس میں ایک ٹھوس اسطوانہ تیر رہا ہے اور یہ سب نظام دونوں اسطوانوں کے مشترک محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے حرکت کر رہا ہے، اگر ظرف اور ٹھوس اسطوانہ کے نصف قطر بالترتیب ر اور ر۱ ہوں تو ثابت کرو کہ حرکت سے ٹھوس اسطوانہ فضا میں

$$\frac{\text{سہ}^{\text{۲}}}{\text{۴ج}}\left(\text{ر}^{\text{۲}} - \text{ر}_{\text{۱}}^{\text{۲}}\right)$$

اور ڈوب جائے گا۔

۵۲ ۔ ایک حوض کی پشتہ بندی ک کثافت والی افقی کھردری پتلی پتھر کی تختیوں سے کی گئی ہے، ان کی رگڑ کی قدر مہ ہے، کنارہ کی چوڑائی اوپر سے ا فٹ ہے اور جو رخ پانی کی سطح سے مس کرتا ہے وہ انتصابی ہے اور ن ا فٹ گہرا ہے۔ ثابت کرو کہ باہر کے رخ کا میلان ہر دو زاویا

$$\text{مم}^{-\text{۱}}\left[\frac{\text{۱}}{\text{مہ ک}} - \frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right] \ \text{اور}\ \text{مم}^{-\text{۱}}\left[\sqrt{\text{۸}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲ک}} + \frac{\text{۳}}{\text{۲ن}^{\text{۲}}}\right)} - \frac{\text{مہ}}{\text{ن}^{\text{۲}}}\right]$$

سے کم نہیں ہونا چاہیے۔

سے کم ہونا چاہئے۔

۵۳ ۔ اگر ایک گز، ایک اونس اور ایک منٹ کو اساسی اکائیاں مانا جائے تو کرہ ہوائی کے دباؤ کو مطلق اکائیوں میں تعبیر کرو جبکہ بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو، پارہ کی کثافتِ اضافی ۱۳ ہو اور پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۰۰۰ اونس ہو۔

[نوٹ ۔ دباؤ کی اکائی کے ابعاد یہ ہیں کمیت میں ۱، طول میں ۔ ۱، اور وقت میں ۔ ۲]

۵۴ ۔ اگر زمین کی سطح کے نیچے ی کی گہرائی پر زمین کی کشش ا + ب ی ہو تو ثابت کرو کہ پانی کے اندر اس گہرائی پر کا دباؤ ک (ا ی + $\frac{1}{2}$ ب ی^2) ہوگا جہاں ک پانی کی کثافت ہے۔

۵۵ ۔ لکڑی کا ایک اسطوانہ جس کا طول ل ہے اور جسکی تراش کا رقبہ عہ ہے ایک جھیل میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ اگر اس کو آہستہ سے اتنا نیچے دھکیلا جائے کہ یہ عین ڈوب جائے تو بتاؤ کہ ایسا کرنے میں جو کام کیا گیا ہے وہ

$$\frac{1}{2} ج\ عہ\ ل^2 \frac{(ک_1 - ک_2)^2}{ک}$$

ہے جہاں $ک_1$ اور $ک_2$ بالترتیب پانی اور لکڑی کی کثافتیں ہیں اور ج جاذبہ ارض ہے۔

۵۶ ۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف میں جس کی تراش کا رقبہ ر ہے لکڑی کا ایک اسطوانہ انتصاباً تیر رہا ہے جسکی تراش کا رقبہ عہ ہے اور طول ل ہے۔ ثابت کرو کہ لکڑی کو آہستہ سے اتنا دبانے میں کہ لکڑی عین پوری ڈوب جائے جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$\frac{۱}{۲}$ ج ع ل^{۲} $\left[۱ - \frac{ع}{ر}\right]$ $\frac{(ک_{۱} - ک_{۲})^{۲}}{ک_{۱}}$ کے مساوی ہے

جہاں $ک_{۱}$ اور $ک_{۲}$ پانی اور لکڑی کی کثافتیں ہیں اور ج جاذبۂ ارض۔

۵۷۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے نچلے سرے کے ساتھ ایک وزنی ذرہ باندھا گیا ہے جسکا وزن سلاخ کے وزن کے $\frac{۱}{ن}$۔ اگنا سے زیادہ ہے، ثابت کرو کہ سلاخ ایک ایسے سیّال کے اندر جسکی کثافت سلاخ کی کثافت کی ن گنی ہے انتصابی محل میں بحالت توازن قائم تیر سکے گی۔

۵۸۔ ایک مخروط کا رأسی زاویہ قائمہ ہے، اسکی کثافتِ اضافی $\frac{۱}{۲}$ ہے اور وزن و ہے، مخروط پانی میں ایس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا رأس نیچے کی طرف ہے، اگر ایک وزن $و_{۱}$ جو و کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہے اسکے قاعدہ کے کنارہ کے کسی نقطہ پر رکھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ مخروط کا محور سمت انتصابی سے جو زاویہ بنائیگا اس کا قوسی پیمانہ تقریباً

$$\frac{۴}{۳\left[\sqrt[۳]{۴} - ۱\right]} \times \frac{و_{۱}}{و}$$ ہوگا۔

۵۹۔ ایک مجوف مستدیر اسطوانہ کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف ہے اس اسطوانہ کو ارتفاع $ف_{۱}$ تک ایک ایسے سیّال سے بھرا گیا ہے جس کی کثافت $ک_{۱}$ ہے، پھر اس کو ایک سیّال میں جس کی کثافت $ک_{۲}$ ہے تیرایا گیا ہے، اگر اسطوانہ کا وزن ن π ا^{۲} ف $ک_{۲}$ ہو تو توازن کے قائم ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۶۰۔ توازن کی یہ شرط کیا ہو جائے گی اگر مجوف مخروط کا ارتفاع

ف ہو، نصف راسی زاویہ عہ ہو، اس کا راس نیچے کی طرف ہو اور اسکا وزن $\frac{1}{3}$ π کہ ن ف۳ مس۲ عہ ہو۔

جو طالب علم احصائے تکملات سے واقف ہے اور اسکے استعمال سے جسموں کے مرکز ثقل اور متوازی قوتوں کا مرکز معلوم کرسکتا ہے وہ دباؤ کے مرکز کے مقام کا بھی اسی طرح سے تعین کر سکیگا۔ چند مثالیں ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔

مستطیل

دفعہ ۱۵۶ کی شکل میں فرض کرو کہ $\text{ا}_\text{ر}\ \text{ا}_\text{ر} = \text{لا}$ اور $\text{ا}_\text{ر}\ \text{ا}_{\text{ر}+1}$ لا کی قیمت میں ایک خفیف اضافہ فرلا کو تعبیر کرتا ہے۔ تب رقبہ $\text{ا}_\text{ر}\ \text{د}_{\text{ر}+1} = \text{ژ} \times \text{فرلا}$ اور چونکہ اس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ قریب قریب وہی ہے اور $\text{و}_1 \times \text{لا}$ کے مساوی ہے اس لئے اس جزو پر کا مجموعی دباؤ $\text{ژ و}_1 \times \text{فرلا}$ ہے۔ لہذا علم سکون دفعہ ۱۱۱ کے موافق اور احصائے تکملات کے اصول کی رو سے

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ژ و}_1 \text{ لا فرلا} \times \text{لا}}{\sum \text{ژ و}_1 \text{ لا} \times \text{فرلا}} = \frac{\int_0^{\text{ب}} \text{ژ و}_1 \text{ لا}^2 \times \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ب}} \text{ژ و}_1 \text{ لا} \times \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\text{لا}^3}{3}\right]_0^{\text{ب}}}{\left[\frac{\text{لا}^2}{2}\right]_0^{\text{ب}}} = \frac{\frac{\text{ب}^3}{3}}{\frac{\text{ب}^2}{2}} = \frac{2}{3}\text{ ب}$$

مثلث جس کا راس سطح میں ہو اور قاعدہ متوازی الافق ہو۔

دفعہ ۱۵۰ کی شکل میں فرض کرو کہ ا د ر = لا اور د ر د ر+۱ لا کی قیمت میں ایک خفیف اضافہ ہے جو فرلا سے تعبیر ہوتا ہے

تب رقبہ ب ر ج ر+۱ متناسب ہے ب ر ج ر × د ر د ر+۱ کے

نیز ب ر ج ر = ب ج × $\frac{\text{ا د ر}}{\text{ا د}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{ک}}$ × لا جہاں ا د = ک

پس انتہائی صورت میں رقبہ ب ر ج ر+۱ متناسب ہے $\frac{\text{ا لا}}{\text{ک}}$ × فرلا کے

نیز ب ر ج ر+۱ کے ہر جزو پر کا دباؤ تقریباً د ر پر کے دباؤ کے مساوی ہے اور اس لئے د ا لا کے متناسب ہے، پس جزو ب ر ج ر+۱ پر کا مجموعی

دباؤ متناسب ہے $\frac{\text{و د ا لا}^2}{\text{ک}}$ × فرلا کے، اس لئے علم سکون

دفعہ ۱۱۱ کے موافق اور احصائے تکملات کے اصولوں کی بنا پر

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \frac{\text{و د ا}}{\text{ک}}\,\text{لا}^2 \times \text{فرلا} \times \text{لا}}{\sum \frac{\text{و د ا}}{\text{ک}}\,\text{لا}^2 \times \text{فرلا}} = \frac{\int_0^{\text{ک}} \text{لا}^3 \times \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ک}} \text{لا}^2 \times \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\text{لا}^4}{4}\right]_0^{\text{ک}}}{\left[\frac{\text{لا}^3}{3}\right]_0^{\text{ک}}} = \frac{\frac{\text{ک}^4}{4}}{\frac{\text{ک}^3}{3}} = \frac{3}{4}\,\text{ک} = \frac{3}{4}\,\text{ا د}$$

مثلث جس کا قاعدہ سطح میں ہو۔ دفعہ ۱۵۳ کی دوسری شکل میں فرض کرو کہ د ر = لا اور رس لا کا ایک خفیف اضافہ ہے جو فرلا سے تعبیر ہوتا ہے، تب اگر د ا = ک تو

$$\text{ن ق} = \text{ب ج} \times \frac{\text{ار}}{\text{اد}} = \text{ار} \times \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک}}$$

پس انتہائی صورت میں ن ی کا رقبہ متناسب ہے $\text{ار} \times \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک}} \times \text{فرلا}$ کے
گذشتہ صورت کی مانند ن ی کے ہر ایک نقطہ پر کا دباؤ تقریباً ل ر پ کے دباؤ کے برابر ہے اور اس لئے و × لا کے متناسب ہے۔
لہذا جب فرلا بہت چھوٹا ہو تو ن ی پر کا مجموعی دباؤ متناسب ہے

$$\text{ار} \times \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک}} \times \text{فرلا} \times \text{و لا} \text{ کے}$$

اس لئے حسب سابق

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ار} \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک}} \times \text{و لا} \times \text{فرلا} \times \text{لا}}{\sum \text{ار} \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک}} \text{و} \times \text{لا} \times \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\int_0^{\text{ک}} \text{لا}^2 (\text{ک} - \text{لا})\ \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ک}} \text{لا} (\text{ک} - \text{لا})\ \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\left[\text{ک} \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4}\right]_0^{\text{ک}}}{\left[\text{ک} \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3}\right]_0^{\text{ک}}} = \frac{\frac{\text{ک}^4}{3} - \frac{\text{ک}^4}{4}}{\frac{\text{ک}^3}{2} - \frac{\text{ک}^3}{3}} = \frac{\text{ک}}{2} = \frac{1}{2}\ \text{د ا}$$

دفعہ [۱۱] کا جواب بھی احصائے تکملات کے استعمال سے نہایت آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔
فرض کرو کہ بلندی لا پر دباؤ د ہے اور بلندی لا + مف لا پر دباؤ

د + مف د ہے جہاں مف د بہت چھوٹا ہے اور لا بلندی پر کثافت ک ہے، اس لئے اگر م کوئی مستقل مقدار ہو تو

$$\text{د} = \text{م ک} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

تب ایک پتلے ستون کے جزو مف لا کے توازن پر غور کرنے سے حسب دفعہ ۱۱۹

$$\text{د} = \text{د} + \text{مف د} + \text{ج ک مف لا}$$

[کیونکہ اس کو د اوپر کی طرف دباتا ہے اور دباؤ د + مف د نیچے کی طرف]

پس اختصار کرنے سے انتہائی صورت میں

$$\frac{\text{فد}}{\text{فلا}} = -\text{ج ک}$$

لہذا (۱) سے

$$\frac{\text{فک}}{\text{فلا}} = -\frac{\text{ج}}{\text{م}}\text{ک}$$

$$\therefore \frac{\text{فک}}{\text{ک}} = -\frac{\text{ج}}{\text{م}} \times \text{فلا}$$

$$\therefore \text{لوک ک} = -\frac{\text{ج}}{\text{م}}\text{لا} + \text{ایک مستقل مقدار س} \quad - (۲)$$

لیکن جسوقت لا = ۰ تو ک = ک۱

$$\therefore \text{لوک ک}_۱ = -\frac{\text{ج}}{\text{م}} \times ۰ + \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۳) کو (۲) میں سے تفریق کرنے سے

$$\text{لوک}\ \frac{\text{ک}}{\text{ک}_{\text{ا}}} = -\frac{\text{ج}}{\text{م}} \times \text{لا}$$

$$\text{یعنی ک} = \text{ک}_{\text{ا}} \times \text{ھو}^{-\frac{\text{ج لا}}{\text{م}}}$$

یہی جواب دفعہ ۱۱۹ کا ہے اور اس سے کسی ارتفاع لا پر کی کثافت نکل سکتی ہے -

جوابات

امثلہ نمبری ۱ صفحہ ۱۶

(۱) ۱۵۶٫۲۵ کلوگرام (۲) ۵٫۶ پونڈ وزن (۳) ۲$\frac{۲۹}{۴۸}$ پونڈ وزن
(۴) ۱:۷ (۵) ۳$\frac{۱۳}{۵۴}$ پونڈ وزن $\frac{۲۴۳۰}{۷}$ = ۱۱ $\frac{۱}{۴۹}$ ۱۰۹۱ ٹن وزن
(۷) ۱۴۴ پونڈ وزن فی مربع انچ (۸) $\frac{۱۲۵}{۱۱}$ = $\frac{۸}{۱۱}$ ۱۰ پونڈ وزن فی مربع انچ
(۹) ۸۰ پونڈ وزن فی مربع انچ۔

امثلہ نمبری ۲ صفحہ ۲۵

(۱) ۵۶۲$\frac{۱}{۲}$ پونڈ وزن (۲) ...۴٫۶۲۹ (۳) ۱۳۵٫۹۸ پونڈ وزن
(۴) ۱۳۶۰۰ گرام وزن (۵) ۲٫۶ (۶) $\frac{۲۳۶}{۲۷۵}$ ۱ مکعب فٹ
(۷) اس کے حجم میں بقدر ....۱٫۱۵۳ مکعب سنٹی میٹر کے اضافہ ہوجاتا ہے
(۸) ...۵٫۷۲ جبکہ π کو $\frac{۲۲}{۷}$ کے مساوی لیا جائے
(۹) $\frac{۹}{۲۷۵}$ مربع انچ
(۱۰) ۶$\frac{۲}{۹}$ (۱۱) ۰٫۱۵۶۲۵ مکعب میٹر (۱۲) ....۸٫۷۲۱
(۱۳) ....۴۹٫۹ (۱۴) ۱۶

امثلہ نمبری ۳ صفحہ ۳۱

(۱) ۳:۱ (۲) ...۹٫۶۵۸ (۳) ۸٫۱۵ (۴) ۱۵ اونس

(۵) $\frac{۶}{۷}$ مکعب فٹ (۶) ۳۴۲ مکعب سنتی میٹر اور ۱۱۰ مکعب سنتی میٹر

(۷) $\frac{۱}{۳}$ (ک$_۱$ + ک$_۲$ + ۲ک$_۳$) (۸) ۱۶ اور ۲ (۹) ۵۹۳۷۵

(۱۰) $\frac{۲۲۹}{۱۹۱۵}$ مکعب سنتی میٹر (۱۱) ۲ (ض-ض$_۱$) (ض$_۲$-ض̄) = (ض$_۲$-ض) (ض̄-ض$_۱$) اور ۳ (ض-ض$_۱$) (ض$_۲$-ض̿) = (ض$_۲$-ض) (ض̿-ض$_۱$)

۵۱

امثلہ نمبری ۴ صفحہ ۴۷

(۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲۲۹۱ پونڈ وزن (۲) ۱۹۵۱۸۴ فٹ (۳) $\frac{۳}{۴}$ ۷ فٹ

(۴) ۳۶۷۸۶۴ فٹ (۵) ۴ میل ۱۵۶۱۶ گز (۶) $\frac{۱}{۴}$۲۸۲۳ پونڈ وزن

(۷) ۹۸ فٹ (۸) ۵۴ فٹ (۹) $\frac{۱۰۹}{۱۴۴}$۱۴ (۱۰) ۱۵۱۴۵۰۰۰

(۱۱) ... ۳۶۱۷۷ میٹر (۱۲) ۷۵۵۱۳۷...... سنتی میٹر (۱۳) ۱۰۲۰۰۰

(۱۴) .... ۱۹۱۳۴ پونڈ وزن ۲۳۰۶۱۶ پونڈ وزن (۱۵) $\frac{۵}{۸}$ ۱۵

(۱۶) ... ۲۰۲۱۰۴ گرین وزن (۱۷) $\frac{۳۶۷}{۴۳۲}$ ۱ (۱۸) ۱۴۹۵۵۶ مکعب انچ

(۲۳) $\frac{۱}{۲}$ ن (ن+۱) ج ک م

امثلہ نمبری ۵ صفحہ ۶۰

(۱) ۷۵۰ پونڈ وزن (۲) $\frac{۴۳}{۹۹}$ ۱۶۲ پونڈ وزن (۳) ۶۷۵۰۰ گرام وزن اوپر کے رُخ پر ۹۴۵۰۰ گرام وزن نچلے رُخ پر ۸۱۰۰۰ گرام وزن ہر ایک انتصابی رُخ پر (۴) ۳۲۰ پونڈ وزن (۵) $\frac{۱۳}{۲۸}$۱۰۴ ٹن وزن

(۶) ۵۰۶۲۵ گرام وزن (۷) π × ۲۹۵۶۱۷ گرام وزن (۸) $\frac{۲۷}{۲۸}$ ۱۵۰۶۶ ٹن وزن

(۹) $\frac{۱۲۵}{۲۸۸}$ پونڈ وزن فی مربع انچ $\frac{۱۲۵}{۱۸}$ π = $\frac{۵۲}{۶۳}$ ۲۱ پونڈ وزن

(۱۰) یہ انتصابی رُخوں کو نسبت ۱+۲۷ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

(۱۱) ۲ء۱ کلوگرام وزن (۱۲) ۰۰۰۸ء۱۹۷۱ پونڈ وزن (۱۳) ۵/۸ ۵۱۵ پونڈ وزن

(۱۴) ۶ ۲/۵ فٹ ، ۵/۲۴ افٹ (۱۵) ۱۲۵۰ اور ۱/۲ ۳۱۲ پونڈ وزن بالترتیب

(۱۷) ۹ فٹ (۱۸) [illegible]

(۱۹) ۴۲۲ء۳۲۵ فٹ (۲۱) ا ب و [ج + ۱/۲ ب جم ط] (۲۲) ۲ ر و [ج + ۱/۲ ع جم ط]

(۲۷) مطلوبہ خط ا لا ہے جہاں لا ، ج د پر کا ایسا نقطہ ہے کہ د لا = ۳/۴ ج د

(۲۸) اگر اس نقطہ کی گہرائی جہاں تقسیم کرنے والا خط مربع کے ا طول والے انتصابی کنارے کو کاٹتا ہے لا ہو تو ۲ لا² - ۶ ا لا + ا² = ۰

(۲۹) افقی قطر کو مساوی حصوں میں تقسیم کرو ان نقطوں سے سطح میں معین کھینچو جہاں یہ معین نصف دائرے کی قوس سے ملینگے وہی نقاط مطلوبہ ہوں گے۔

(۳۰) اگر اس نقطہ کی گہرائی جہاں تقسیم کرنے والا خط ج ب سے ملتا ہے لا ہو اور ا اور ب کی گہرائیاں بالترتیب عہ اور بہ ہوں تو

۲ لا² + ۲ عہ لا - بہ (عہ + بہ) = ۰

(۳۵) اگر مخروط کا ارتفاع ف ہو تو سطح مستوی کی گہرائی صورت اول میں ف/۲ ∛۴ ہوگی اور صورت دوم ف/۲ ہوگی۔

امثلہ نمبری ۶ صفحہ ۷۱

(۲) صندوق کو آدھا بھرنا چاہئے۔ (۳) ۵/۹ ۲۰ پونڈ

امثلہ نمبری ۷ صفحہ ۷۹

(۱) ۱۶ : ۹ (۳) ۳ : ۱ (۴) (۱۱/۴ + ۲) ا² ف و

(۶) ا ـ ژ ف و (ا ـ $\frac{\pi}{۹}$)^{۲} ۲ = ژ ف و (ا + $\frac{\pi}{۹}$)

(۷) $\frac{۵۷۵}{۲۱۶}$ π پونڈ وزن

امثلہ نمبری ۸ صفحہ ۸۸

(۱) π ژگ و^{۲} π ژ و$\sqrt{}$ ماگ^{۲} + $\frac{۱۶ ژ^{۲}}{۹}$ جو افقی سمت کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۴ ژ}{۳ ماگ}$ بناتا ہے۔

(۲) رگ ف و جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے اور ر اسکے قاعدہ کا نصف قطر (۳) $\frac{۱}{۴}$ ر ف^{۲} و

(۴) حاصل مجموعی دباؤ $\frac{ژ^{۲} ف و}{۲}$ $\sqrt{\pi^{۲} + ۱۶}$ مرکز سے گزرتا ہے اور افق کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{\pi}{۴}$ بناتا ہے۔

(۵) افق کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۳ \pi ژ}{۵ ف}$ بناتا ہے۔

(۶) $\frac{۱}{۴}$ ژ ف و $\sqrt{\pi^{۲} ژ^{۲} + ۴ ف^{۲}}$

امثلہ نمبری ۹ صفحہ ۹۷

(۳) مس$^{-۱}$ $\frac{۱۰۹}{۹۶}$ (۴) و (ا + ۳ جب^{۲} عہ)$^{\frac{۱}{۲}}$ و جب عہ جم عہ^{۲} جہاں ۲ عہ مخروط کا رأسی زاویہ ہے اور و مخروط کے پانی کا وزن ہے۔

(۷) ۳ و مس عہ جم^{۲} (عہ + بہ)^{۲} و [ا + ۳ مس عہ جب (عہ + بہ) جم (عہ + بہ)]

(۸) حاصل مجموعی دباؤ $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ π ژ^{۳} و نصف کروی سرے کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور افق کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۲}{۳}$ بناتا ہے جہاں ژ سرے کا نصف قطر ہے

امثلہ نمبری ۱۰ صفحہ ۱۰۴

(۱) $\frac{۶۰۷۳}{۱۰۸۰۰}$ ۲ مکعب فٹ (۲) $\frac{۱}{۴}$۳ پونڈ (۳) ۵۰ مکعب سنٹی میٹر

(۴) ۴، ۳ ۵-۰۰۰، (۵) $۴۵\frac{۵}{۱۱۱۱}$ مکعب میٹر

(۶) $۱۳۱\frac{۱۱۷}{۱۵۵۹}$ مکعب سنتی میٹر، ۸٫۶۶۱ (۷) $۲۵۷\frac{۱۴}{۱۰۷}$ فٹ

(۸) ...۲۶۷ء۰ انچ (۱۲) ۲۵ء۵ (۱۳) $۴\frac{۳}{۴}$ انچ (۱۴) ایک مکعب سنتی میٹر حجم کا خلا ہے۔ (۱۵) $۳۶۳\frac{۱}{۲۰۴}$ مکعب انچ (۱۶) ۲٫۲۳ (۱۷) $\frac{۱۱}{۱۵}$

(۱۸) $\frac{۳}{ا + ب + ج}$ ، $\frac{ب ج + ج ا + ا ب}{۳ ا ب ج}$ (۱۹) ۳۰ پونڈ

(۲۰) ۹۰۰ مکعب انچ، ۱۰ انچ (۲۷) ف $(۱ - \frac{ک}{۲})^{\frac{۱}{۲}}$

(۲۸) $\frac{۳۴۳}{۲۰۷}$ (۳۰) $\frac{ف}{۲}$ $\sqrt{۴۳۴}$

امثلہ نمبری ۱۱ صفحہ ۱۱۳

(۱) ۰۰۶۵ء۵ (۲) $\frac{۳}{۵}$ مکعب انچ (۳) ...۴ ۰۵ ۶ء۱۳

(۴) ۴۰۷ : ۹۱۸ (۶) پٹہ ڈوب جائیگا۔ (۷) $ن = \frac{م + ۱}{۲}$

(۹) نئی گہرائی کی نسبت ابتدائی گہرائی کے ساتھ ۳۹۳۵ : ۳۹۴۸ ہے

امثلہ نمبری ۱۲ صفحہ ۱۲۰

(۱) ا- ۱۲ پونڈ وزن ۲- ۶ پونڈ وزن (۳) ۳۷۳۸۰ : ۳۷۲۴۹

(۴) $\frac{۵}{۱۹}$ ۹۷ پونڈ وزن، $۴۵\frac{۱۷}{۱۹}$ پونڈ وزن (۵) ۱۸ء۵

(۶) ۱۵ گرام وزن (۷) ۲ : ۳ (۸) لکڑی کا ٹکڑا

(۹) ۵ (۱۰) برتن والے ترازو کی سوئی نیچے اُتر آئیگی اور جسم والے ترازو کی سوئی اوپر چڑھ جائیگی، دونوں سوئیوں سے جسم کے ہٹائے ہوئے پانی کے وزن کی بالترتیب زیادتی یا کمی تعبیر ہوگی۔

(۱۲) ۲ مکعب انچ، $\frac{۸۷۵}{۱۷۲۸}$ پونڈ وزن

(۱۳) ۷ $\frac{۲۱}{۲۲}$ پونڈ وزن، ۵۶ پونڈ وزن

امثلہ نمبری ۱۴ صفحہ ۱۲۵

(۱) ۹۰ گرام وزن (۳) ۵ پونڈ وزن

(۴) ۱ء۵۸۰۰۰۰ گرام (۵) ۱۱ $\frac{۴۷}{۶۳}$ اونس وزن

(۶) $\frac{۳}{۲۸}$ ج (۷) $\frac{۲۷}{۳۲}$

امثلہ نمبری ۱۵ صفحہ ۱۳۳

(۴) ۱- $\frac{۱}{۲}$ ر $\sqrt{۲۷}$ ۲- ر جہاں ر مشترک قاعدہ کا نصف قطر ہے

امثلہ نمبری ۱۶ صفحہ ۱۳۹

(۳) $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۱}{۴}$ (۱۰) $\frac{(ک_۱ - ک)(ک_۲ - ک_۱)}{(ک_۱ - ک_۲)(ک_۱ - ک_۳)}$ ف فاصلہ اوپر اٹھ آتا ہے

(۱۷) $\frac{۲ک_۲ک_۳}{ک_۲ + ک_۳}$، $\frac{۲ک_۳ک_۱}{ک_۳ + ک_۱}$، $\frac{۲ک_۱ک_۲}{ک_۱ + ک_۲}$ (۱۹) ۷ : ۱۸

(۲۰) $\frac{۱۱}{۱۶}$ (۲۲) ۱۲ $ب_۱$ ک $جب^۲$ ط ($ب_۱$ جم ط - $ل_۱$ جب ط)

= ۴ $ل_۱^۲$ جم ط (۲ - $جم^۲$ ط) - ۶ $ل_۱ ج_۱$ + ۳ $ج_۱^۲$ جم ط

امثلہ نمبری ۱۷ صفحہ ۱۵۳

(۱) ۷۵ء (۲) ۳۸۶۷ء تقریباً (۳) $\frac{۹}{۱۳}$ ۷

(۴) ... ۲٫۰۴۵۸ (۵) ۶ $\frac{۱}{۴}$

امثلہ نمبری ۸ صفحہ ۱۶۱

(۱) ۱٫۵۲۵ (۲) ۳ (۳) ۲ $\frac{۶}{۱۹}$ (۴) ٫۸۶۵
(۵) $\frac{۱۲}{۱۳}$ (۶) $\frac{۲}{۳}$ (۷) $\frac{۵}{۹}$ (۸) ٫۸۴۸
(۹) ٫۹۴۱۳ تقریباً (۱۰) ۱٫۸۴۱ (۱۱) ۱٫۶
(۱۲) ۹ (۱۳) ٫۸۷، ۵۰ مکعب سنتی میتر (۱۴) ۳۰ گرام وزن، ۲
(۱۵) ٫۵ (۱۶) ۱ $\frac{۱}{۱۲}$ (۱۷) ۷ $\frac{۷}{۶۴}$ پونڈ، ۵ $\frac{۱۱}{۱۷}$ پونڈ سونا اور
۱ $\frac{۲۹}{۳۴}$ پونڈ چاندی

امثلہ نمبری ۹ صفحہ ۱۷۲

(۱) ۳٫۴۵۶، ۳٫۱۴۱ اور ۲٫۸۸ (۲) ۱٫۰۳ (۳) ۶ $\frac{۲}{۱۳}$ انچ
(۴) ... ۱٫۰۹۴۷ (۵) ۱ $\frac{۷}{۱۷}$ مکعب سنتی میتر
(۶) $\frac{۱}{۵۰۱}\frac{ک}{ک-۱}$ جہاں ک جوفہ کے مادہ کی کثافتِ اضافی ہے۔
(۷) ٫۹۰۶ (۸) ۱۰ : ۱۳ (۹) ۱۸ : ۱۹
(۱۰) ۸ $\frac{۷}{۲۰}$ اونس (۱۱) ۲٫۵ (۱۲) ۸
(۱۳) ۲ $\frac{۲}{۷}$ اونس

امثلہ نمبری ۱۰ صفحہ ۱۷۹

(۱) ۲۰٫۲ (۲) ۶ انچ (۳) جس نلی میں تیل ہے اس کے عین
پیندے میں۔ (۴) ۱٫۷ (۵) ۱۴٫۹۵۵۶ مکعب انچ (۶) $\frac{۲۷}{۴۴}$ سنتی میتر

امثلہ نمبری ۲۶ صفحہ ۲۶۵

(۱) ارتفاع ۳۱٫۷۲ سے ۳۵٫۱۴ تک بدلتا ہے۔

(۲) ۲۴ فٹ ۱ انچ، (۳) ۳۳ فٹ ۴ انچ (۴) ۸۰

(۵) پہنچ جائیگا۔ (۶) ۲ فٹ، $۳۲ - ۱۶\sqrt{۲}$ = ۹٫۳۷ فٹ تقریباً

(۷) $۸۶۸۰\frac{۵}{۹}$ پونڈ وزن (۸) $۲۶۰\frac{۵}{۱۲}$ پونڈ وزن

(۹) $\frac{\pi ۶۲۵}{۸}$ پونڈ وزن، $\frac{\pi ۳۱۲۵}{۸}$ پونڈ وزن

(۱۰) ر × وٕ × ج ل × ب ل دفعات ۱۲۸ اور ۱۴۰ کے طریق کتابت کی رُو سے

(۱۱) ۴۰ π کلوگرام وزن، ۶۰۰ π کلوگرام وزن

(۱۳) $۲\frac{۵}{۹}$ فٹ

(۱۴) پانی اوپر کے نل میں نہیں آسکیگا، $۲۵\frac{۱}{۲}$ فٹ

امثلہ نمبری ۲۷ صفحہ ۲۸۲

(۱) ۱:۳ (۲) دباؤ $\hat{۹} : \hat{۱۰}$ کی نسبت میں ہیں

(۴) آخری دباؤ کی نسبت ابتدائی دباؤ کے ساتھ $\hat{۱۰} : \hat{۱۱}$ ہے جو تقریباً ۱۰ : ۱۲ کے مساوی ہے

(۵) ۱ - ۵ ۲ - ۸ (۶) ۴ (۷) $۸\frac{۵}{۹}$ انچ

(۹) ۳۷ اور ۳۸ کے درمیان (۱۰) ۲۰ (۱۱) ۲۲

(۱۳) $\frac{۲۴۶۵}{۲۵۶۱}$ (۱۴) کرہ ہوائی کی کثافت کی ایک چوتھائی

امثلہ نمبری ۲۸ صفحہ ۲۹۰

(۱) ۳۴ فٹ (۲) ۲۲ فٹ ۸ انچ

امثلہ نمبری ۲۹ صفحہ ۳۰۲

(۳) $\frac{۵}{۲۴}$ ل و (۷) ۴ : ۶ : ۳

امثلہ نمبری ۳۰ صفحہ ۳۰۸

(۲) $\frac{۹ گ^۲ + ف^۲ - ۴ ف گ}{۲(۳ گ - ف)}$ (۳) $\frac{۶ گ^۲ - ۸ ف گ + ۳ ف^۲}{۲(۳ گ - ۲ ف)}$

(۴) $۳ \frac{۹}{۷۴}$ فٹ (۶) $\frac{۱}{۸}$ $\frac{ف گ}{ف + گ}$

امثلہ نمبری ۳۱ صفحہ ۳۱۴

(۲) $\frac{ل^۲ + ل م + م^۲ + ۲ ف (ل + م)}{۲ (ل + م + ۳ ف)}$

(۴) اس کی گہرائی مرکز کی گہرائی کی $\frac{۵۵}{۵۴}$ گنی ہے۔

(۷) $\frac{۷ \sqrt{۳}}{۲۰}$ ل جہاں ل ایک ضلع کا طول ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ صفحہ ۳۳۲

(۱) $\sqrt{\frac{۲ ج ف}{و}}$ (۴) ج ک $[ف - \frac{سہ^۲}{۲ ج} (ل^۲ - م^۲)]$ مرکز سے فاصلہ م پر

(۶) $\sqrt{\frac{۲ ج ف}{ر}}$ (۱۹) اگر ل $سہ^۲ < ۲ ج$ تو $\frac{\pi}{۴} \times \frac{سہ^۲ ل^۴}{ج}$ اگر ل $سہ^۲ > ۲ ج$

تو $\frac{۲ \pi}{۳} \times \frac{ل^۳ سہ^۶ - ۲ ج^۳}{سہ^۴}$

(۲۱) $\frac{۱}{۴} \sqrt{\frac{۶ ج}{ر}}$

امثلہ نمبری ۳۳ صفحہ ۳۴۹

(۱) ۳ : ۲ (۲) ۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ

(۳) ۵/۱۴۴ انچ (۴) ا [۱ + عہ ت]^(۱/۲)

متفرق مثالیں صفحہ ۳۵۷

(۱) ۸۹ ۳۱/۱۴۴ گز (۲) ۶٫۶ گرام فی مکعب سنتی میٹر، ۲/۳ ۱۶۶۶ مکعب سنتی میٹر

(۳) ۵۰/۶۳ (۴) ۳۵۷ π گرام (۵) ۱۱ : ۹

(۸) ۲۹٫۴ سنتی میٹر (۹) ۳۲۰۰۰ مکعب فٹ (۱۰) π ۳۷۵/۶۴ − ۸ = ۱۰٫۴ اونس تقریباً

(۱۱) ۱٫۳۲ (۱۲) ٫۷۵ (۱۳) ۱٫۵

(۱۴) پہلے فاصلہ کا بقدر ۸/۳۰۵ (۱۵) ...۵٫۰۵ انچ

(۱۶) ۳۳۷ : ۳۴۲ (۱۹) اس کا ارتفاع = ر۲²/(ر۱² × ک) × ف/۴

(۲۰) اگر ب ج کا وسطی نقطہ د ہو تو و، د ا پر واقع ہوگا اور د و = ۱/۳ × د ا

(۲۱) ۲۷ : ۶۴، ۹ف/۶۴ جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے

(۲۲) مقدار ۱۸ π د √۱۰ اور سمت عمل افق سے زاویہ مس⁻¹ ۱/۳ بناتی ہے۔

(۲۵) ۱- یہ اوپر اُٹھتا ہے ۲- بالعموم یہ نیچے اترتا ہے۔

(۲۹) ۱۰٫۲۰ سنتی میٹر، ۲۶۶۵۶۰۰ (۳۳) ۳۸٫۸۵

(۴۲) √(۴ج/۳ا) (۴۳) π/۳ ول³ جب² عہ جم عہ √(۱ + ۳ جب² عہ)

(۴۴) مس⁻¹ [۸/۳ √(۱ − ۲ لہ ن + ۲ لہ² ن²)] جہاں لہ = ک/(۱ − ک)

(۴۷) ۱/(۲ک) [ا + ف + √((و + ف)² + ۴ ف ب)] دفعہ ۱۲۳ کے طریق کتابت کے مطابق، (۱) یہ زیادہ ہوگا (۲) یہ کم ہوگا۔

(۵۳) ۱۱۲۳۲ × ۱۰⁶ جہاں ج = ۳۲

(۵۹) ۲ (ن ف ک۲ + ف ک۱)² > ک۱ ک۲ (۲ ف² + ا²) + ک۱² (۲ ن ف − ا²)

(۶۰) (ن ف³ ک۲ + ف³ ک۱)² > ک۲ (ف² ک۱ + ۸/۹ ن ف² ک۲ جم² عہ)³

تمت

فہرست اصطلاحات

Absolute temperature	تپش مطلق
Air Pump	ہواپمپ
Alloy	ملواں دھات
Apparent weight	ظاہری وزن
Atmospheric pressure	کرۂ ہوائی کا دباؤ
Barrel	نل
Barometer	باریما
Bellows	دھونکنی
Boiler	جوش دان
Bulb	جوفہ
Buoy	پیرکوا
Buoyancy	اچھال
Capacity	گنجائش
Cartesian diver	کارٹیزی غواص
Centimetre	سنتی میٹر
C. G. S. System	سنتی میٹر گرام، ثانیہ نظام (س، گ، ث نظام)
Centre of gravity	مرکز ثقل (ث)
Centre of pressure	دباؤ کا مرکز
Coal gas	کوئلہ گیس

Column of mercury	پارہ کا اسطوانہ
Common Pump	عام پمپ
Suction Pump	چوس پمپ
Common Surface	سطح مشترک
Compressibility	پچکنے کی قابلیت
Compression	پچک
Cone	مخروط
Condenser	مکثف
Contraction	سکڑاؤ
Cork	کاک
Correction	تصحیح
Crown glass	کلسی شیشہ
Curved surface	منحنی سطح
Cylinder	اسطوانہ
Density	کثافت
Displacement	ہٹاؤ
Distilled water	کشید کیا ہوا پانی
Diving bell	ظرف غواص
Double cone	دوہرا مخروط
Double barrelled pump	دونلا پمپ
Dyne	ڈائن
Effective surface	موثر سطح
Equilibrium	توازن
Ether	ایتھر
Faulty Barometer	ناقص بارپیما

Flint glass	سربی شیشہ
Floating bodies	تیرنے والے اجسام
Floating Surface	تیرنے کی سطح
Fluid pressure	سیالی دباؤ
Foot pound System of units	اکائیوں کا فٹ، پونڈ نظام
Force pump	داب پمپ
Fulcrum	نصاب
Friction	رگڑ
Frustum	مخروط ناقص
Gas	گیس
Graduation	درجہ بندی
Gramme	گرام
Heavy liquid	وزن دار مائع
Hetrogeneous fluid	غیر متجانس سیال
Homogeneous fluid	متجانس سیال
Hypothetical fluid	فرضی سیال، مثالی سیال
Hydrometer	مائع پیما
Hydrostatics	علم سکون سیالات
Hydraulic Press / Hydrostatic Press	آبی شکنجہ
Hydrostatic paradox	سکون سیالات کا مسئلہ غریبہ
Hydrostatic balance	آبی میزان
Ice berg	یخ کا تودا
Imperfect Vacuum	ناقص خلا

Intensity of gravity	(جاذبہ کا) اشتداد
Intrinsic weight	ذاتی وزن
Ivory	ہاتھی دانت
Kilogramme	کلوگرام
Lamina	پترا
Level	ہمواری
Lever	بیرم
Lifting pump	اٹھاؤ پمپ
Liquid	مائع
Loaded Barometer	بوجھل کیا ہوا بارپیما
Mercury	سیمابی بارپیما
Mercury guage	سیمابی داب پیما
Metacentre	مرکز مابعد
Millimetre	ملی میٹر
Mixture	آمیزہ
Moment	معیار اثر
Naphtha	نفتہ
Nozzle	ٹونٹی
Oak	شاہ بلوط
Olive oil	زیتون کا تیل
Paraboloid of revolution	گردشی مکافی نما
Parallelopiped	متوازی السطوح
Perfect Fluid	سیال کامل
Piston	فشارہ
Plate	تختی

English	اردو
Plug	ڈاٹ
Poplar	چنار
Poundal	پونڈل
Principle of work	کام کا اصول
Quartz	چقماق
Receiver	قابلہ
Reservoir	حوض
Resultant thrust	حاصل مجموعی دباؤ
Resultant Vertical thrust	حاصل انتصابی دباؤ
Rigid body	استوار جسم
Rotating liquids	گھومنے والے مائعات
Safety valve	محافظ کھلمندن
Shape	شکل
Shearing Stress	جزّی زور
Siphon	سیفن
Siphon Barometer	سیفنی باریما
Size	جسامت ۔ قامت ۔ ناپ
Slant Side of a Cone	مخروط کی سطح مائل
Solids	مجسمات
Solution	محلول
Specific gravity	کثافت اضافی
Sphere	کرہ
Spherical	کروی
Spout	دہانہ

Stability	قیام
Standard temperature	معیاری تپش
Stop cock	روک ڈاٹ
Stroke	ضرب، مار
Syringe	پچکاری
Tangential force	مماسی قوت
Tar	تارکول
Torricellian vacuum	طرسلی کا خلا
Thrust	مجموعی دباؤ
Treacle	شیرہ
Triangular Prism	منشور مثلثی
Tube	نلی
Turpentine	تارپین
U Tube	لانما نلی
Uniform Pressure	یکساں دباؤ
Vacuum	خلا
Vapour pressure	بخاری دباؤ
Viscous fluid	لزج سیال
Volume	حجم
Water line	خطِ آبی
Water-tight Piston	آب بند قشارہ
Air-tight Piston	ہوا بند قشارہ
Wax	موم
Whole Pressure	کل دباؤ
Zone	منطقہ

غلط نامہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۱	۸	ہوا	ہو
۲۷	۱۰	اضافی کثافتیں	کثافتیں اور اضافی کثافتیں
۲۹	۱۹	کثافت	کثافت اضافی
۳۰	۵	حَ	ضَ
۴۰	۱۴	اب چونکہ	کیونکہ
۵۶	۱	طبعی	طبیعی
۸۵	۵	بتانا	بنانا
۱۰۶	۲	کثافت	کثافت اضافی
۱۰۷	۶	کثافت	کثافت اضافی
۱۱۵	۱۷	دیا	دیا گیا
۱۱۹	۱	(۱- ک۲)/(۱- کَ)	۱ - ک۲/کَ
〃	۶	کسر	کسر بالا
۱۲۱	۱۳	۲۶۹	ر۶
۱۲۶	۷	ڈبوینے	ڈبونے
۱۳۳	۱۶، ۱۸	مرکز ثقل	مرکز
۱۳۹	۱۵	ہے بالعموم	ہے وہ بالعموم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۴۶	۲۱	کرد کسی	کرہ کو کسی
۱۴۹	۱۳	وَ۱	و۱
۱۵۲	۱۲	وَ(۱ عہ/ک۲)	وَ(۱- عہ/ک۲)
۱۷۰	۱۱	و۱	و
۱۷۶	۷	ر۵	وس
۱۷۷	۱۲	عہ بہ	عہ، بہ
〃	۱۱	ہیں اس	اس
۱۹۴	۲۰	قدرتی درجہ	قدرفی درجہ
۲۰۴	۱	مساوی	متناسب
۲۵۶	۱۹	سطح	بالائی سطح
۲۷۵	۱۸	بھی	کبھی
۲۸۷	۱۰	قصر	قعر
۲۹۰	۳	لرانے	گرآنے
۲۹۰	۱۰	کسی	کس
۲۹۱	۹	ار ار	ار ارَ
۳۰۵	۱۴	ف : ار	ف : ار۱
۳۰۶	۵	ف + ار	ف + ار۱

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۰۶	۱۰	ف۲+	ف۲+	۳۴۵	۷	ن ل ل	ن ل لَ
۳۱۴	۲	ف	فا	۳۵۴	۹	ا ج	ا ج یہ
۳۲۸	۶	قاعدو	قاعدہ	۳۶۷	۵	سہ ہے	سہ سے
۳۳۱	۷	قطر	انتصابی قطر	۳۸۴	۱	=۲	-۲
۳۳۵	۱۰	کے کافی	کے لئے کافی	۳۸۹	۹	(۱)..۳۴۵،۵	..۳۴۵،۳
۳۳۷	۱۵	افقی پر	افقی میز پر				

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۵	Triump-htus	Triump-hatus
۱۹۱	۲۵	Epitomic	Epitome
۲۱۳	۱۳	ہوگئی	ہوگی
۲۱۵	۱۳	Pheasure	Pleasure
۲۱۷	۱	زیرکی بھی	زیرکی ہیں
۲۱۸	۱۷	Cher[illegible]ry	Cherb[illegible]ry
۲۲۲	۳	نہایت	نہایت عمدہ
۲۲۸	۱۱	Instautae	Instantae
۲۳۹	۱۹	علم و فہیم	علم دشمن
"	۲۵	[illegible]	
۲۴۲	۶	ہوئی تھی	ہوتی تھی
۲۴۴	۵	کرسے	کریں
۲۴۷	۱	Gassaies	Essays
"	۸	سنہ ۱۶۴۴	سنہ ۱۶۲۴
"	۱۱	Habbes	Hobbes
۲۵۲	۱۰	بدایت	بداہت
۲۵۹	۲۵	باوجو	باوجود
۲۶۴	۹	مکالمات	کے مکالمات
۲۶۶	۱۹	واسطے	راستے
۲۷۱	۳	دھکم دھکے	دھکم دھکا
۲۷۵	۱۷	تقابل	تعامل
۲۷۶	۱۳	Tenilon	Feleon
"	۱۶	۳۰	۲ —

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۲۷۶	۱۷	۳۰	۳ —
۲۷۷	۱	شہزادہ	شہزادی
۲۷۸	۶	سترھتوی	سترھویں
۲۸۱	۱۶	ربط باطی	ربط باطنی
۲۸۵	۴	تناقس	تناقض
۲۹۰	۲۰	Restoratian	Restoration
۳۰۱	۱۰	جمور	جمود
۳۰۵	۲۰	سے	ہے
۳۱۱	۲۱	نہیں انے	نہیں آتے
۳۱۶	۱۷	سے	×
۳۱۷	۷	ثیمسن	تشمین
"	۲۵	تیاؤ	برتاؤ
۳۱۹	۲۵	عقل تسلیم	عقل سلیم
۳۲۴	۱۴	انگلیکون	اینگلیکن
۳۲۶	۱۹	نقص	نقض
۳۲۷	۲۰	Nathanial	Nathaniel
۳۲۷	۲۰	Culorwell	Culorwel
۳۲۸	۵	سرج نبات	سن وفات
"	"	Rolph	Ralph
"	۱۷	کالونس کیطرح	کالونی کیطرح
		[illegible] تھی	ہوتی تھی
۳۲۸	۲۳	Dead Anim[illegible]	Ded Anima

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۳۲۹	۲۴	Philosopica De legius natur disquise tio	De legibus naturae disquistio philosoph ica
۳۳۵	۱۰	Jorgens	Jorgeuseu
۳۴۰	۲۲	بڑا نہیں بنایا	برا نہیں بتایا
۳۴۴	۲۰	تمام	×
۳۵۵	۱۷	تحفظ ذلت	تحفظ ذات
〃	〃	وجود	وجوہ
۳۷۱	۲۴	عدوت	حدوث
۳۷۵	۱۶	مواخذہ	مآخذ
۳۷۶	۱	Gothfried	Gottfried
۳۷۹	۲	سے	اسی
۳۸۲	۱۲	ڈیکارٹ تا	ڈیکارٹ کا
〃	۱۸	Theodicce	Theodicee
۳۸۸	۱۳	اسپیر بیل	بیر بیل
۳۹۷	۲۳	تو یا بات	تو یہ بات
۴۰۱	۴	لانفرطنز	لائبنٹز
۴۰۶	.	Princes	Principes
۴۰۹	۲۵	میں	ہیں
۴۱۳	۷	Liberta	Liberte

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۴۱۳	۸	Dermal	Mal
۴۱۵	۲۵	Torguin	Targuin
۴۱۹	۹	Geotius	Gerotius
۴۲۰	۱	Bhritian	Christian
۴۲۳	۱۸	Theologiacy	Theolog iaes
۴۲۹	۱	تعلیم حاصل کیے	تعلیم حاصل کی
〃	۸	اکفورڈ	مظہریت
〃		Puritanism	Puritanism
〃	۲۰	السکول کلیب	السکول کلیبا
〃	۲۲	سنہ [illegible]ء	سنہ ۱۶۹۷ء
۴۳۱	۲۳	Dc	De
〃	۵	Hum	Human
۴۴۳	۱	زبان	زبان
۴۵۷	۱۲	اخلاق	اطلاق
۴۵۸	۱۵	ماثیر	ماثر
۴۵۹	۶	–	1736
۴۶۴	۷	Eighteen or	Eighteen
۴۷۶	۵	تناقس	تناقض
۴۷۹	۱۴	Beyle	Boyle
۴۵۷	۵	Roussean	Rousseu
۵۰۷	۸	اس کو	اس پر
۵۰۸	۲۲	Delogues	Dialogues
〃	۲۴	تاریخی حیثیت کی	تاریخی حیثیت کی نسبت

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۵۰۸	۲۲و۲۳	National	Natual
۵۱۵	۲۵	Vismposi	Positiv
″	″	tive	ism
۵۲۰	۴	تھوڑا	تھوڑے سے
۵۲۳	۱۳	تعلم	تعلیم
۵۲۳	-	Rohlen	Problem
۵۳۶	۳	Portalit	Porthf
۵۴۲	۲۲	زنانہ	زنانہ
۵۴۸	۸	1715	1705
″	۱۰	Des liesprit	De' lesprit
۵۶۰	۹	Interprela tion	Interpret ation

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۲	۳	۴
۵۶۲	۳	مکانات	مکالمات
۵۷۰	۳	قوتوں سے	قوتوں نے
″	۱۵	دوسردی	دوسری
۵۷۱	۱	روسو نے کو بڑا کام یہ	روسو نے
″	″	کیا کہ جین جیک	بڑا کام یہ کیا کہ
″	″	روسو اس	اس
۵۷۴	۱۹	Encylop	Encyclo
″	″	aedia	paedia
۵۷۵	۱	Rosscaw	Rosseau
۵۷۶	۱۰	اس سے	اس کے
۵۸۰	۱۸	ہم	.
.	.	.	.